Hranaté bubliny

VLADIMÍR VÍCHA
Gymnázium Pardubice, Dašická 1083; ÚTEF ČVUT Praha

Abstrakt

Bublina je krásný fyzikální objekt. Vyfouknutá z malého bublifuku vytvoří tvar dokonalé koule, hraje barvami duhy a plave vzduchem, jako by na ni byla gravitace krátká. Za každým z těchto jevů se skrývá zajímavá fyzika. V našem příspěvku se zaměříme na tvar bublin, a to nejen těch kulatých.

Proč jsou kapičky a bubliny kulaté?

Kulaté bubliny zná každý, protože je lze pozorovat pouhým okem, ale fotografie padající kapky dokazuje, že je také kulatá. I vodní kapky na listech některých rostlin mají tvar koule. Proč právě tento tvar?

Úloha: Máte k dispozici 1 dm^3 modelíny. Vytvarujte z ní nejprve krychli, pak kouli a pak dvě koule. Objem je vždy stejný 1 dm^3. Porovnejte povrchy těles.

Experiment budeme považovat za spíše myšlenkový a nebudeme rozdávat každému studentovi hroudu modelíny. Studenti jistě dokážou vymyslet, že krychle o daném objemu má hranu 1 dm a povrch S_{kr} = 6 dm^2. U koule je třeba z objemu určit poloměr a pak povrch, který vyjde S_1 = 4,836 dm^2. Kdybychom vytvořili 2 stejné koule, bude jejich celkový povrch S_2 = 6,093 dm^2. Jedna koule má tedy menší povrch než dvě koule a také menší povrch než krychle. Hovoříme o tom, že se kapalina snaží zaujmout tvar s co nejmenší povrchovou energií, tedy s co nejmenším povrchem, a to je právě tvar jediné koule.

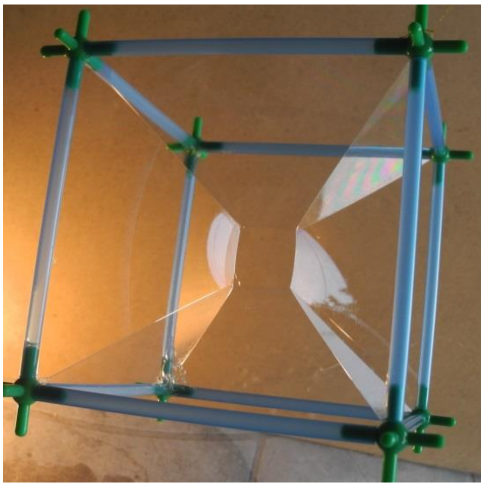
Můžeme dotáhnout úlohu ještě kousek dál a odvodit, jak se mění celkový povrch S_N při vytvoření N stejných koulí. Středoškoláci by mohli odvodit, že

$$S_N = \sqrt[3]{36\pi V^2} \cdot \sqrt[3]{N}.$$

Tisíc stejných koulí má tedy povrch 10krát větší, než jedna koule o témže objemu.

Bubliny přichycené na mřížku

Jestliže např. do vody s rozpuštěným jarem ponoříme mřížku, na které se může kapalina přichytit, vznikají na ní po vytažení z kapaliny zajímavé tvary – hranaté bubliny. Neznalého člověka tvary asi překvapí (obr. 1) a ještě překvapivější je, že při opakování pokusu dostáváme vždy stejný tvar (pokud je bublina přichycena na všech hranách). Jako by si mřížka neomylně pamatovala tvar, který má na ní vzniknout.



Obr. 1 - Vlevo bublina v pravidelném čtyřstěnu, vpravo bublina v krychli.

Respektují i hranaté bubliny minimální povrch?

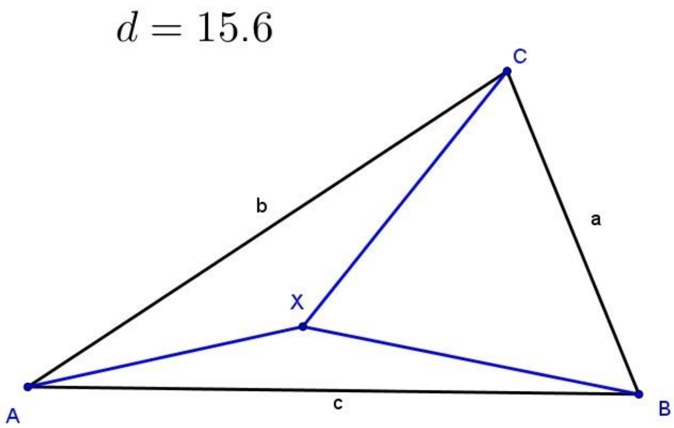
Hledání minima funkce je matematicky zajímavá úloha. Zkusme se nejprve zabývat nikoli prostorovou (3D) úlohou ale jen rovinnou (2D) úlohou.

Úloha: V rovině je rozmístěno N bodů. Najděte spojnici, která je všechny propojí a má nejkratší délku.

Toto je matematická úloha spadající do teorie grafů vedoucí na tzv. **Steinerovy stromy**.

Trojúhelník

Úlohu budeme řešit nejprve pro $N = 3$. Můžeme začít pokusem a omylem. Ve volně dostupném programu GeoGebra (www.geogebra.org) můžeme vymodelovat obecný trojúhelník *ABC* a pohyblivý bod *X*, který spojíme s jeho vrcholy. Veličina *d* představuje zkoumanou délku, tedy součet $d = |XA| + |XB| + |XC|$. GeoGebra umožňuje dynamickou geometrii, proto je možné pohybovat bodem *X*, přičemž se mění aktuální délka *d*.

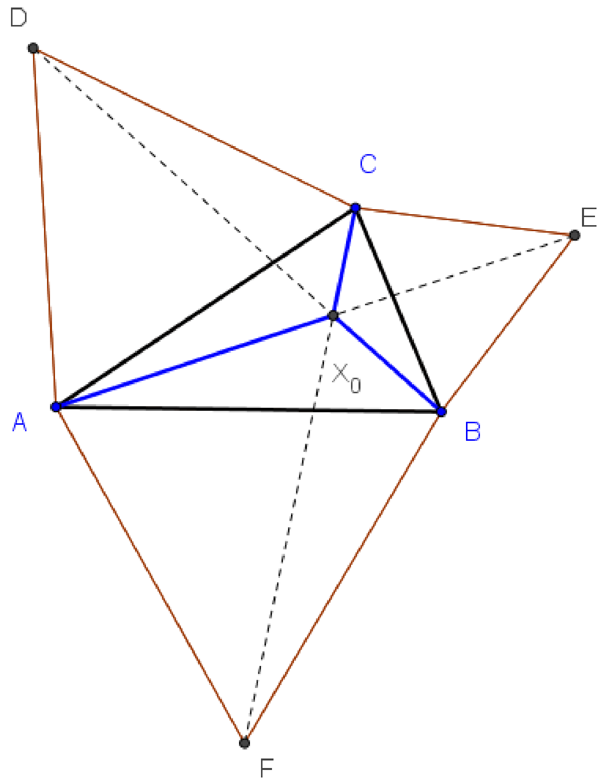


Obr. 2 - Hledání nejkratší spojnice vrcholů trojúhelníku.

Když bod *X* umístíme do některého ze tří vrcholů, nabývá *d* hodnot **19,47**; **15,73**; **15,14**. Možná nás napadne, že *d* bude minimální pro těžiště (vyjde d = **14,61**), nebo pro ortocentrum (vyjde d = **14,42**), nebo pro střed kružnice opsané (vyjde d = **15,32**), nebo pro střed kružnice vepsané (vyjde d = **14,28**). Ze zkoumaných bodů vychází nejmenší d pro střed kružnice vepsané. Je to však opravdu minimum?

Tuto úlohu hledání bodu s minimální vzdáleností od vrcholů trojúhelníku zformuloval zřejmě poprvé P. Fermat (1601-1665) v dopise E. Torricellimu (1609-1647, který jej vyřešil [1].

Nad stranou AC trojúhelníku ABC sestrojíme rovnostranný trojúhelník ACD a vrchol D pak spojíme s B. Tento postup zopakujeme i pro zbývající dvě strany. Lze dokázat, že úsečky DB, EA a FC se protnou v jediném bodě X_0, kterému se říká first isogonic center, nebo také **Fermat-Torricelliho bod**.

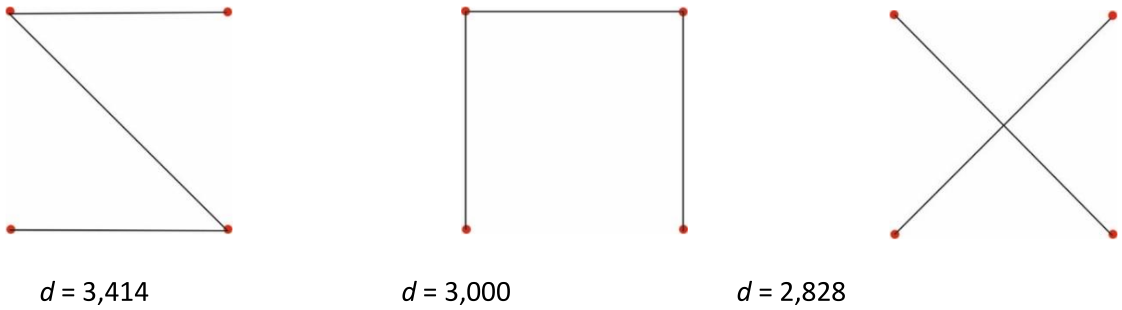


Obr. 3 - Konstrukce Fermat-Torricelliho bodu X_0.

Na stránce [1] jsou tři důkazy minimální vzdálenosti a další vlastnosti bodu. Například, že každá strana trojúhelníka (s vnitřními úhly menšími než 120°) je z Fermat-Torricelliho bodu vidět pod úhlem 120°.

Čtverec

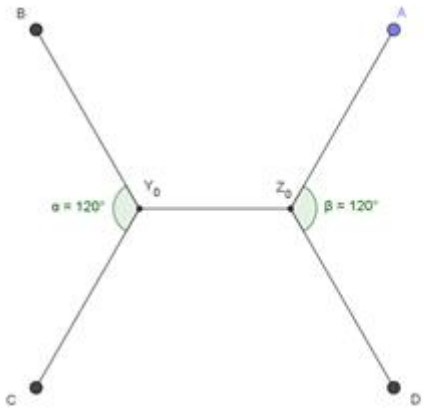
Nyní budeme řešit úlohu pro N = 4 a čtyřúhelníkem bude čtverec o straně 1. Spojnice budeme vytvářet z úseček, protože nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je úsečka. Začněme opět pokusem a omylem.



Obr. 4 - Několik stromů s určením délky spojovací čáry.

Pomocí GeoGebry lze zmapovat, že umístění bodu do středu čtverce dává minimální hodnotu *d*. Ale existuje ještě kratší spojnice.

K absolutnímu minimu vede strom, který využívá <u>dva body</u> uvnitř čtverce (obr. 5).



Obr. 5 - Nejkratší cesta spojující vrcholy čtverce.

Hledání minima délky spojnice můžeme provést derivováním. Zajímavé je, že podobně jako u Fermat-Torricelliho bodu se i zde objevují úhly 120°.

Pravidelný čtyřstěn

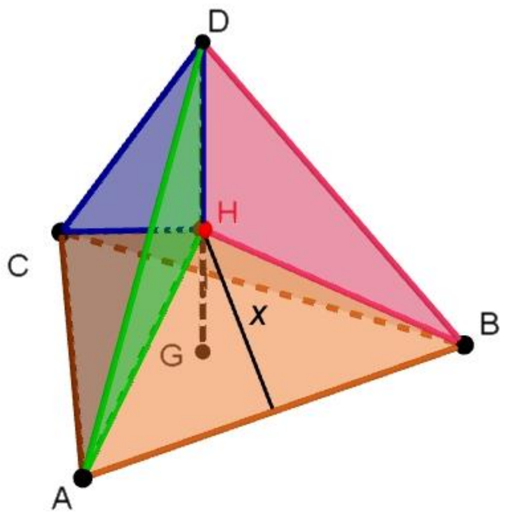
Nyní přidáme jeden rozměr a budeme již řešit minimální povrchy bublin vázaných na hrany prostorové mřížky.

Úloha: Bublina je přichycená na všech 6 hranách čtyřstěnu. Existuje blána (plocha), která má minimální povrch?

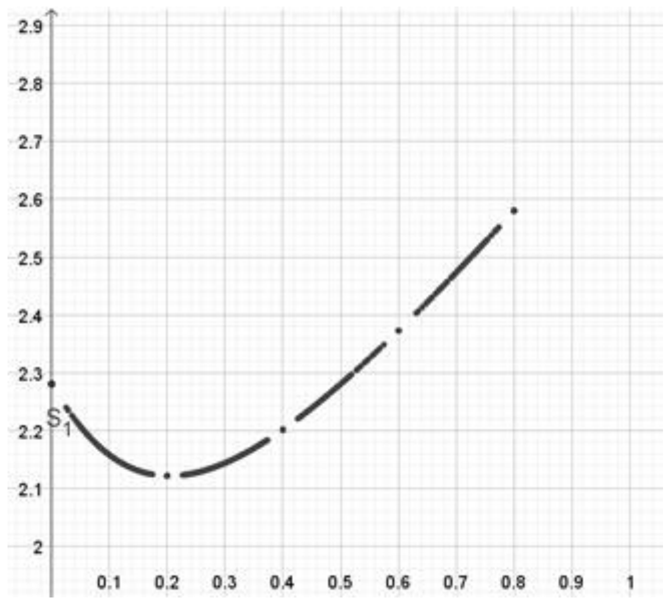
Bublina má na výběr třeba možnost, že by pokryla povrch čtyřstěnu, tedy vytvořila 4 trojúhelníky. Protože každá blána má 2 povrchy, budeme počítat povrch dvakrát (ale není to důležité). Dvojnásobný povrch čtyřstěnu o hraně délky 1 vychází 3,464 j^2. Zapamatujme si toto číslo.

GeoGebra umožňuje výhodně vymodelovat 3D tělesa, se kterými se dá libovolně otáčet a prohlížet si je tak z různých pohledů. Vymodelujeme (obr. 6) tvar bubliny podobný tomu, co reálně pozorujeme (obr. 1 vlevo) s pohyblivým bodem *H* na úsečce *GD*.

Tvar bubliny na obr. 6 se skládá z 6 trojúhelníků (každý se 2 povrchy) a při umístění pohyblivého bodu *H* do vrcholu *D* dostáváme povrch právě 3,464 j^2 a při umístění do dolní podstavy povrch 2,280 j^2, tedy menší. Nejmenší hodnota je však 2,121 j^2.



Obr. 6 - Hledání tvaru bubliny v pravidelném čtyřstěnu.



Obr. 7 - Závislost velikosti povrchu bubliny v čtyřstěnu na výšce bodu H nad podstavou.

Sestavíme funkci pro povrch bubliny a budeme hledat její minimum. Je výhodné zvolit jako proměnnou *x* výšku v trojúhelníku např. *ABH*. Dvojnásobný povrch bubliny *S* pak splňuje rovnici

$$S = 3x + \sqrt{2} - \sqrt{3x^2 - \frac{1}{4}}$$

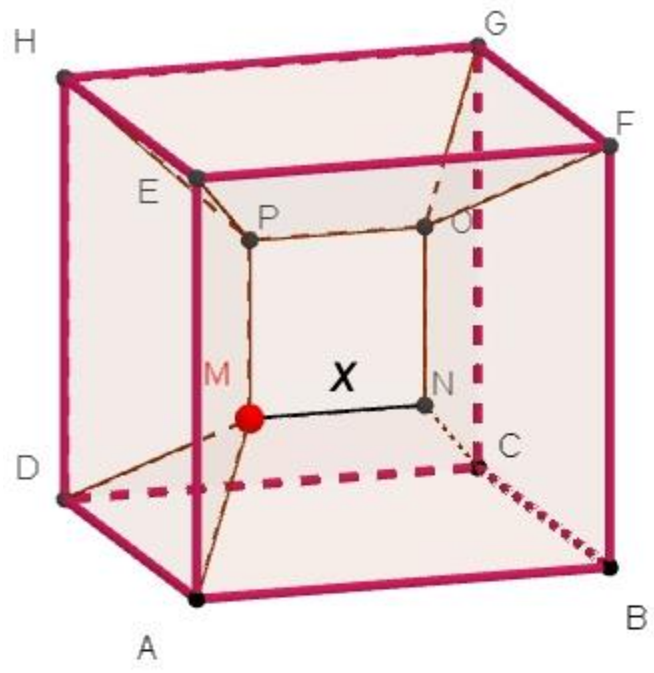
Minimální povrch nalezený pomocí derivace nastává pro $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Pro tuto hodnotu se bublina skládá z 6 shodných rovnoramenných trojúhelníků s úhlem 109,471°při hlavním vrcholu. Princip minimálního povrchu jsme tedy pro čtyřstěn ověřili.

Krychle

Úloha: Bublina je přichycená na všech 12 hranách krychle. Existuje blána (plocha), která má minimální povrch?

V GeoGebře můžeme vymodelovat krychli o hraně 1 a v ní bublinu skládající se z jednoho čtverce, čtyř shodných rovnoramenných trojúhelníků a osmi shodných rovnoramenných lichoběžníků, což odpovídá experimentálnímu pozorování (obr. 1 vpravo). Situace je teď v prostoru, ale cítíme analogii s obr. 5, který se týká roviny.

Bod M uděláme pohyblivý tak, že změnou jeho polohy budeme moci měnit velikost x strany čtverce a necháme si vykreslit závislost velikosti povrchu bubliny na proměnné x (obr. 9).

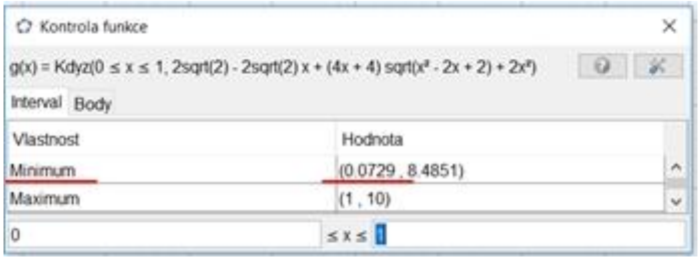


Obr. 8 - Hledání tvaru bubliny v krychli.

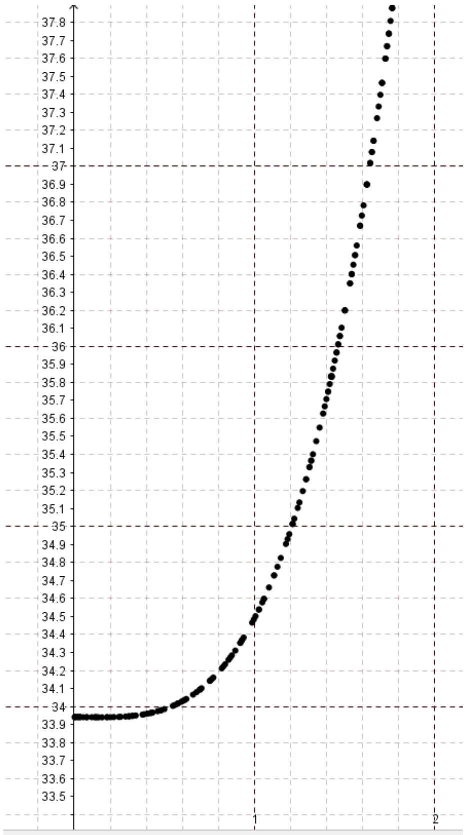
Zatímco na obr. 7 vidíme jasné minimum funkce, na obr. 9 se zdá, že minimum nastává pro $x = 0$, tedy žádný čtverec. Zkusíme se podívat na funkční předpis pro závislost velikosti povrchu S na x.

$$S = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + (4x + 4)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 2\sqrt{2}$$

K nalezení extrému lze také využít program GeoGebra, který nakreslí graf funkce a poskytne informace o extrémech (obr. 10).



Obr. 10. Extrémy funkce na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$



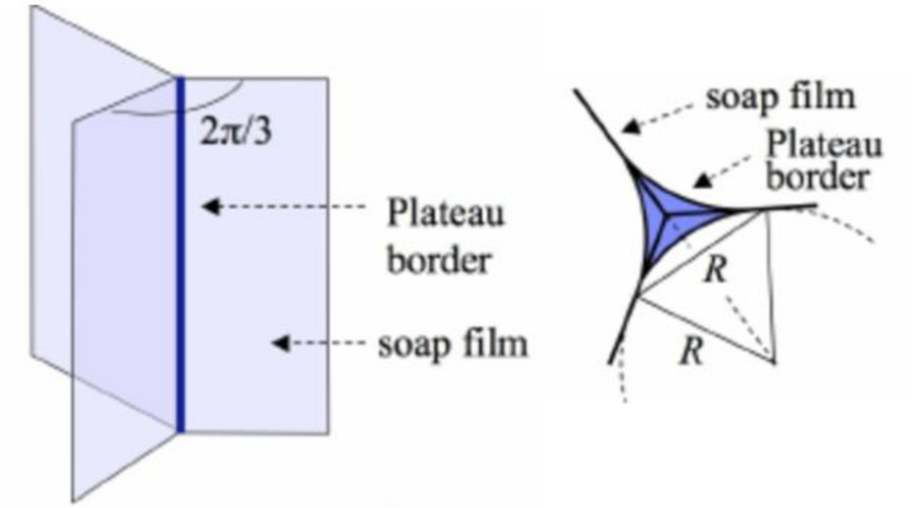
Obr. 9. Závislost velikosti povrchu bubliny v krychli na x.

Minimum funkce tedy nenastává v nule, ale velmi blízko u nuly pro $x = 0{,}0729$. Jak velký by tedy měl vzniknout čtverec v krychli, kterou jsme použili my (obr. 1 vpravo)? Krychle měla hranu o velikosti 105 mm a poměr strany čtverce k hraně krychle je pro minimální povrch roven 0,0729. Vychází $x = 7{,}7$ mm, což ale neodpovídá realitě. Strana čtverce je více než dvakrát větší a to opakovaně. Někde je problém.

Plateau border

V předchozích úvahách jsme předpokládali, že bublina se skládá z rovinných povrchů, které se stýkají na úsečkách. Realita je ale taková, že v místě styku se povrch zakřivuje a vznikají jakési kanály připomínající v řezu plochu mezi třemi dotýkajícími se kružnicemi – Plateau borders (obr. 11). Články na internetu naznačují, že stabilní minimální povrch se hledá simulací na počítačích, a to již asi na střední škole studovat nebudeme.

Lze snad shrnout, že u čtyřstěnu je geometrie bubliny taková, že vliv Plateau border se neprojevil, ale u krychle již výrazně ano. Analogie 2D (spojnice vrcholů) a 3D (spojnice hran) bohužel nevyšla úplně dobře.



Obr. 11 - Plateau border na styku tří rovinných povrchů [2].

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point
[2] https://www.researchgate.net/profile/Cyprien_Gay).