Postřelené špalíky

VLADIMÍR VÍCHA[*], *TOMÁŠ FAIKL*[**]

[*]Gymnázium, Pardubice, Dašická 1083; ÚTEF ČVUT Praha
[**]Student Gymnázia, Pardubice, Dašická 1083

Abstrakt

Jestliže diabolka vystřelená svisle vzhůru zasáhne dřevěný špalík podepřený na obou krajích, špalík vyletí a roztočí se. Při zásahu blízko těžiště se roztočí méně a při zásahu dál od těžiště se roztočí více. Když na videozáznamu porovnáme výšky, kam špalík vystoupí v prvním a ve druhém případě, je prokazatelné, že rychle roztočený špalík vyletí výše. Příspěvek se zabývá řešením tohoto problému.

Jak vznikl problém?

Dva studenti našeho gymnázia Tomáš Faikl a Roman Švéda natočili video, jež chtěli přihlásit do soutěže „Vím proč". Dřevěný špalík položili na válcovou trubku se svislou rotační osou, do ní pod špalík vsunuli vzduchovku a svisle vzhůru vystřelili. Děj snímali dvěma kamerami. Špalík po zásahu diabolkou vylétl vzhůru a ještě se roztočil. Když byl špalík zasažen více do kraje, roztočil se více (což je nepřekvapilo), ale současně vylétl prokazatelně výše (což překvapilo studenty i dotázané učitele fyziky). Termín uzávěrky soutěže se blížil, a tak po určitých diskusích studenti natočili video včetně komentáře. Jev se pokusili vysvětlit odporem vzduchu a různou hloubkou proniknutí diabolky. Video si můžete prohlédnout na
https://www.vimproc.cz/?page=search&q=faikl#?page=record&id=1436.

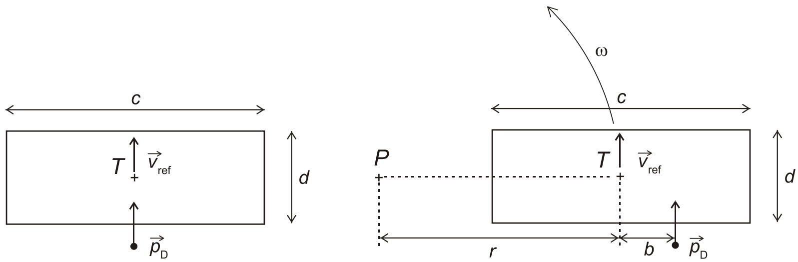
S vysvětlením jsme ale moc spokojeni nebyli, a tak začala dlouhodobá spolupráce T. Faikla a V. Víchy, která přinesla zcela jiné vysvětlení potvrzené dalšími experimenty.

Paradox

Proč se nám jeví situace paradoxní? Protože uvažujeme z hlediska energie. Vystřelená diabolka má kinetickou energii, která se po zásahu špalíku mění na další energie. Špalík získá kinetickou energii posuvného pohybu, kinetickou energii rotačního pohybu a vzroste vnitřní energie soustavy diabolka, špalík a vzduch. Jestliže je špalík více roztočený, má větší rotační kinetickou energii a měl by tedy mít menší posuvnou kinetickou energii a tudíž vyletět do menší výšky. Předpokládáme, že změna vnitřní energie je stejná.

Volný špalík

Vyřešme nejprve jednodušší případ. Špalík o průřezu $c \times d$ budeme považovat za volné těleso (mimo gravitační pole, resp. ve stavu beztíže), do kterého narazí diabolka (obr. 1a). Vektor její rychlosti je kolmý na stěnu a míří do těžiště špalíku.



Obr. 1 a) Rychlost míří do těžiště *T*, b) Rychlost míří mimo těžiště *T*

Ve všech experimentech budeme uvažovat rovinný pohyb, k jehož popisu nám budou postačovat souřadnice *x*, *y*. Třetí rozměr špalíku není důležitý.

V experimentu podle obr. 1a nedojde k rotaci a špalík získá pouze kinetickou energii posuvnou. Rychlost těžiště budeme nazývat referenční a budeme značit v_{ref}. Vyjádříme ji ze zákona zachování hybnosti (nepružná srážka dvou těles)

$$v_{ref} = \frac{p_D}{m'}, \tag{1}$$

kde p_{D} je hybnost diabolky a m' je hmotnost špalíku s diabolkou. Rychlost v_{ref} má směr hybnosti diabolky, tedy svisle vzhůru.

V experimentu podle obr. 1b dojde k rotaci v kladném směru. Těžiště špalíku získá rychlost směrem vzhůru a špalík začne rotovat s úhlovou rychlostí ω. Pro izolovanou soustavu těles špalík – diabolka platí zákon zachování hybnosti, z něhož vyjde, že rychlost těžiště je opět v_{ref} a míří svisle vzhůru. Platí ale současně zákon zachování momentu hybnosti, z něhož určíme ω.

Moment hybnosti $\vec{L}$ hmotného bodu vzhledem k bodu *A* je definován

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{2}$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhledem k bodu A a $\vec{p}$ je hybnost hmotného bodu. Moment hybnosti tělesa $\vec{L}$ vzhledem k bodu A je definován

$$\vec{L} = \vec{r_\mathrm{T}} \times \vec{p_\mathrm{T}} + J'_\mathrm{T} \cdot \vec{\omega}\,, \tag{3}$$

kde $\vec{r_\mathrm{T}}$ je polohový vektor těžiště tělesa vzhledem k A, $\vec{p}_\mathrm{T}$ je hybnost těžiště, J'_T je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k těžišti a $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost tělesa.

Jako vztažný bod A v našem případě výhodně zvolíme těžiště T a zapíšeme, že moment hybnosti před srážkou (jen diabolka) je roven momentu hybnosti po srážce (roztočený špalík s diabolkou). Již bez vektorů:

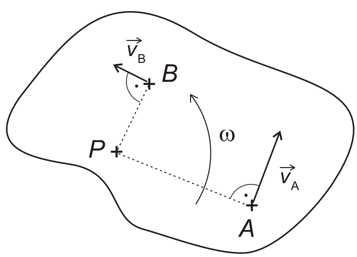
$$b\,p_\mathrm{D} = J'_\mathrm{T}\ \omega \text{ a odtud } \omega = \frac{b\,p_\mathrm{D}}{J'_\mathrm{T}}\,, \tag{4}$$

kde b budeme nazývat záměrná vzdálenost (je znázorněna v obr. 1b) a J'_T je moment setrvačnosti tělesa po srážce.

Z rovnice (1) plyne, že rychlost špalíku směrem vzhůru nezávisí na záměrné vzdálenosti b a je vždy stejná. Z rovnice (4) plyne, že úhlová rychlost ω na b závisí. Pokud bude moment setrvačnosti diabolky vůči T zanedbatelný vzhledem k momentu setrvačnosti špalíku, roste ω s rostoucí b přímo úměrně. Potvrzuje se tedy, že špalík je při zásahu do kraje více roztočený, ale výše nevyletí. Vysvětlení našeho paradoxu musíme hledat jinde.

Pól pohybu

Pólem pohybu neboli okamžitým středem otáčení tělesa se nazývá bod P spojený s tělesem, jehož rychlost je v daném okamžiku vzhledem k laboratorní soustavě nulová. Všechny body tělesa pak v daném okamžiku rotují kolem pólu pohybu P. Jejich rychlost je kolmá na spojnici s P a je úměrná poloměru otáčení (obr. 2) [1].



Obr. 2 Bod P je pól pohybu. Velikost okamžitých rychlostí bodů je úměrná poloměru otáčení.

Platí

$$v_\mathrm{A} = \omega \left| PA \right|, \quad v_\mathrm{B} = \omega \left| PB \right| \ . \tag{5}$$

Nyní najdeme polohu pólu pohybu pro experiment podle obr. 1b. Bod *P* bude na kolmici k vektoru $\overrightarrow{v_{ref}}$ někde vlevo. Poloměr otáčení *r* těžiště určíme

$$r = \frac{v_\mathrm{ref}}{\omega} = \frac{\dfrac{p_\mathrm{D}}{m'}}{\dfrac{p_\mathrm{D} b}{J'_\mathrm{T}}} = \frac{J'_\mathrm{T}}{m' b} . \tag{6}$$

V dalších úvahách budeme hmotnost diabolky a moment setrvačnosti diabolky považovat za zanedbatelné vzhledem k hmotnosti a momentu setrvačnosti špalíku (v našich experimentech to bylo splněno). Moment setrvačnosti kvádru (náš špalík se tomuto tvaru blíží) vzhledem k ose procházející těžištěm kolmé na stěnu o rozměrech $c \times d$ je

$$J_\mathrm{T} = \frac{1}{12} m \left(c^2 + d^2 \right), \tag{7}$$

kde *m* je hmotnost kvádru. Po zmíněných zanedbáních a dosazení (7) do (6) dostaneme pro polohu pólu pohybu *P* rovnici

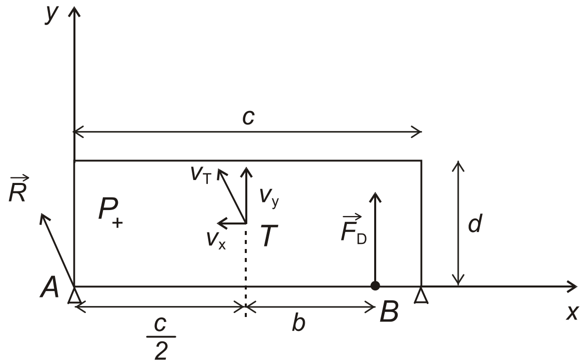
$$r = \frac{c^2 + d^2}{12 b} . \tag{8}$$

Z rovnice (8) je zřejmé, že *P* může ležet mimo špalík jako na obr. 1b (pro $r > \frac{c}{2}$), nebo uvnitř špalíku (pro $r < \frac{c}{2}$).

Podepřený špalík

Dokázali jsme, že u volného špalíku jeho rychlost nezávisí na *b*. Tajemství se tedy zřejmě skrývá v kontaktu s podpěrou. Prováděli jsme reálný experiment, při němž byl špalík podepřen na obou krajích a zasažen do bodu *B*. Soustava souřadnic *Axy* má počátek v místě levé podpěry (bod *A*), viz obr. 3.

Položme si otázku: *Odrazí se špalík od podpěry v bodě A*? Správná odpověď je: *Jak kdy*. Pokud bude *P* mimo špalík jako na obr. 1b, pak všechny body špalíku vyletí vzhůru a k odrazu nedojde. Pokud bude *P* uvnitř špalíku jako na obr. 3, pak body vpravo od P rotují vzhůru a body vlevo dolů, a k odrazu v A dojde. Záleží na místě zásahu B.



Obr. 3 Špalík podepřený na obou krajích umístěný do soustavy souřadnic Axy. V bodě A působí reakce podpěry $\vec{R}$, těžiště má rychlost $\vec{v}_T$ skloněnou doleva.

Existuje tedy určitá mezní hodnota $b_{\min}$, pro niž platí:

Jestliže $b \in \langle 0\,; b_{\min} \rangle$ špalík se neodrazí a těžiště bude mít rychlost $v_{\text{ref}} = \dfrac{p_D}{m}$ svisle vzhůru.

Jestliže $b \in \left(b_{\min}; \dfrac{c}{2} \right)$ špalík se odrazí a těžiště bude mít rychlost $\vec{v}_T = \left(v_x; v_y \right)$.

Minimální hodnotu b určíme z podmínky $r < \dfrac{c}{2}$, tedy $\dfrac{c^2 + d^2}{12b} < \dfrac{c}{2}$.

Po úpravě

$$b > \frac{c^2 + d^2}{6c} \quad \text{proto} \quad b_{\min} = \frac{c^2 + d^2}{6c}. \tag{9}$$

Rychlost po odrazu

Svitla naděje na řešení úvodního paradoxu. Odraz od podpěry by mohl špalíku pomoci do větší výšky. Ale není to ještě tak jednoduché.

Nyní jde již o interakci tří těles: špalík, diabolka a Země. Na špalík působí síla diabolky F_D, reakce Země R a tíhová síla F_G. Lze dokázat, že vliv F_G je v našem experimentu během srážky zanedbatelný. Zbývající dvě síly určují rychlost těžiště a ω rotace tělesa. K řešení využijeme druhou větu impulzovou, kterou budeme výhodně psát vzhledem k bodu A

$$\vec{L} = \int_0^t \vec{M}\,\mathrm{d}t \quad \text{po úpravě} \quad \vec{r}_\mathrm{T} \times \vec{p}_\mathrm{T} + J_\mathrm{T}\,\vec{\omega} = \int_0^t \vec{M}\,\mathrm{d}t\,, \qquad (10)$$

kde t je čas do zastavení diabolky.

Z důvodu vektorových součinů zavedeme ještě třetí souřadnici z a určíme souřadnice důležitých bodů a vektorů:

$$A = [0;\,0;\,0],\; B = \left[\left(\frac{c}{2}+b\right);\,0;\,0,\;\right],\; T = \left[\frac{c}{2};\,\frac{d}{2};\,0\right],\; \vec{r}_\mathrm{T} = \left(\frac{c}{2};\,\frac{d}{2};\,0\right),$$

$$\vec{r}_\mathrm{B} = \left(\left(\frac{c}{2}+b\right);\,0;\,0\right),\; \vec{\omega} = (0;\,0;\,\omega),\; \vec{F}_\mathrm{D} = (0;\,F_\mathrm{D};\,0),\; \vec{M} = \left(0;\,0;\left(\frac{c}{2}+b\right)F_\mathrm{D}\right).$$

Při úpravách využijeme také první pohybový zákon pro zabrzdění diabolky

$$\int_0^t F_\mathrm{D}\,dt = p_\mathrm{D}\,. \qquad (11)$$

Úpravami (v tomto článku pro ně není prostor) rovnice (10) s využitím (11) získáme skalární rovnici

$$m\frac{c}{2}v_y + m\frac{d}{2}v_x + J_\mathrm{T}\,\omega = \left(\frac{c}{2}+b\right)p_\mathrm{D}\,, \qquad (12)$$

ve které figurují všechny neznámé v_y, v_x ω, které nás zajímají. Pro jejich určení budeme potřebovat ještě dvě rovnice. Využijeme fakt, že hmotnost Země je tak velká, že bod A se nepohne, tedy $v_A = 0$ vzhledem k laboratorní soustavě. Rychlost $\vec{v_A}$ vyjádříme složením rychlosti těžiště $\vec{v}_\mathrm{T} = (v_x;\,v_y;\,0)$ a rychlosti rotace kolem těžiště

$$\vec{v}_\mathrm{A} = \vec{v}_\mathrm{T} + \vec{\omega}\times\left(-\vec{r}_\mathrm{T}\right) = 0\,.$$

Po rozepsání do složek obdržíme ještě dvě skalární rovnice

$$v_x = -\omega\frac{d}{2} \qquad (13)$$

a

$$v_y = \omega \frac{c}{2}\,. \tag{14}$$

Řešením soustavy (12), (13) a (14) obdržíme hledané veličiny. Nás zajímá nejvíce rychlost v_y, která určuje výšku výstupu špalíku

$$v_y = \frac{3c\left(\frac{c}{2} + b\right)}{2\left(c^2 + d^2\right)} \cdot \frac{p_D}{m}\,. \tag{15}$$

Nyní již můžeme přistoupit k porovnání velikosti rychlostí v_{ref} (1) a v_y (15). Provedeme diskusi vzhledem k parametru $b \in \left(b_{min}\,; \frac{c}{2}\right)$. Rychlost v_y je evidentně rostoucí lineární funkcí b. Výsledky pro významné hodnoty b vidíme přehledně v následující tabulce.

Tabulka: Závislost rychlosti těžiště špalíku v závislosti na *b*

b	v_y
$(0\,; b_{min})$	$v_{ref} = \frac{p_D}{m}$
b_{min}	$v_{y\,min} = \frac{4c^2 + d^2}{4c^2 + 4d^2} \cdot \frac{p_D}{m}$
$\frac{c}{2}$	$v_{y\,max} = \frac{3c^2}{2c^2 + 2d^2} \cdot \frac{p_D}{m}$

Je vidět, že pro b_{min} je $v_y < v_{ref}$ (jmenovatel je větší než čitatel) a špalík proto vyletí méně než při zásahu pod těžiště. Pro maximální možnou záměrnou vzdálenost $c/2$ však může být $v_y > v_{ref}$ a špalík může vyletět výše. Ale ne libovolný špalík. Vyřešíme nerovnici

$$\frac{3c\left(\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)}{2\left(c^2+d^2\right)}>1\cdot$$

Řešením je jednoduchá podmínka, kterou musí splňovat strany špalíku

$$\frac{c}{d}>\sqrt{2}\,. \tag{16}$$

Pokud tato podmínka není splněna, nedočkáme se efektu, který studenti natočili.

Kam nejvýše může špalík vyletět?

Porovnáme výšku h_{ref}, do které vyletí těžiště špalíku pro $b\in\langle 0;b_{\mathrm{min}}\rangle$ a výšku h_{max} pro $b=\frac{c}{2}$. Budeme řešit jako vrh svislý se zanedbáním odporu vzduchu.

$$\frac{h_{\mathrm{max}}}{h_{ref}}=\frac{v_{\mathrm{ymax}}^2}{v_{\mathrm{ref}}^2}=\left(\frac{3c^2}{2c^2+2d^2}\right)^2. \tag{17}$$

Vidíme, že

$$\lim_{d\to 0}\left(\frac{3c^2}{2c^2+2d^2}\right)^2=\frac{9}{4}\,. \tag{18}$$

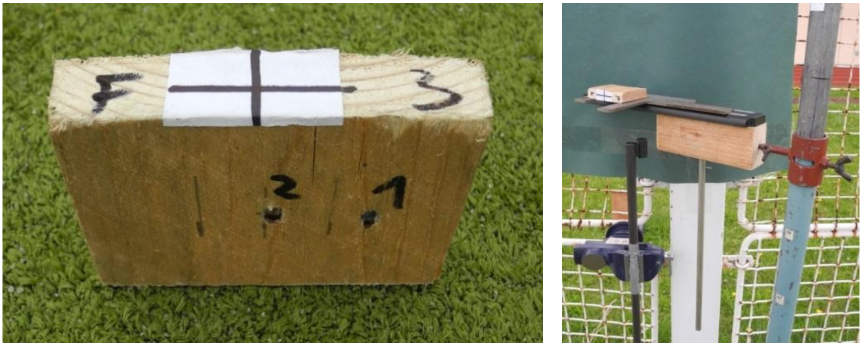
Nekonečně tenká deska (d = 0) by tedy při stejném c při zásahu na okraj vyletěla nejvýše, a to 2,25krát výš než při zásahu pod těžiště. Toto číslo překonat nelze.

Výrazné zvětšení výšky výstupu při zásahu na okraj špalíku jsme experimentálně ověřili.

Experiment a jeho výsledky

K měření rychlosti vystřelených diabolek jsme použili měřič rychlosti střely Dragon DCH 330 shooting chronograph. Opakovaným měřením jsme určili rychlost diabolky $v_{\mathrm{D}}=\left(176,7\pm 1,2\right)$ m/s s relativní odchylkou 0,7 %.

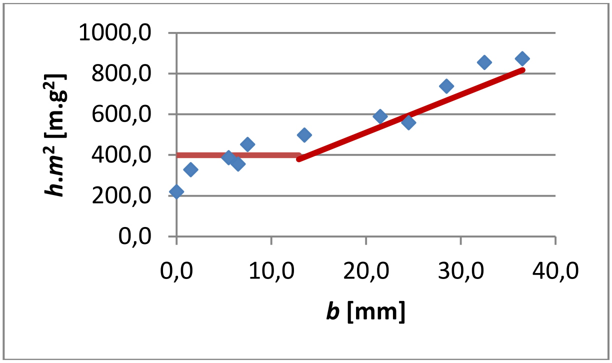
Hmotnost diabolky jsme určili na digitální váze a vychází $m_D = 0{,}5$ g. Hmotnosti dřevěných špalíků jsme měřili na digitální váze s přesností na desetiny gramu. Jejich rozměry jsme vzhledem k nepřesnostem měřili posuvným měřítkem s přesností na 0,5 mm. Se stejnou přesností jsme měřili i záměrnou vzdálenost *b*. Na špalíky jsme nalepili značky s označením polohy těžiště pro lepší sledování kamerou (obr. 5 vlevo).



Obr. 5 Špalík s označením polohy těžiště zasažený již dvěma diabolkami (vlevo) a sestava se stojanem, opěrou a vzduchovkou ve svěráku (vpravo)

Vzduchovku jsme uchytili do svěráku a vyrobili posouvatelnou podpěru pro špalíky. Místo zásahu jsme odměřovali pomocí drátu zasunutého do hlavně. Pohyb špalíku jsme sledovali dvěma kamerami. Jedna s frekvencí snímkování 1200 FPS zabírala odraz špalíku. Druhá s frekvencí snímkování 120 FPS, resp. 60 FPS snímala celý pohyb. Zpracování videa jsme dělali v programu Tracker. Pro kontrolu, že obraz je nezkreslený a že polohy těžiště jsou dobře určeny, jsme sestrojili graf závislosti *y* na čase. Do něj jsme fitovali kvadratickou funkci (vrh svislý) a z ní určili hodnotu tíhového zrychlení *g*. Když hodnota vycházela 9,7 až 10,0, byli jsme spokojeni.

V průběhu jednoho školního roku jsme provedli 4 série pokusů, které jsme postupně zpřesňovali. V poslední sérii jsme používali dřevěné špalíky o parametrech $c = 75$ mm, $d = 14$ mm, $m = 25\text{-}28$ g. Hybnost diabolky byla $0{,}0885\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Výsledkem této série je graf na obr. 6. Vidíme na něm porovnání výšky výstupu *h* naměřené a vypočtené.



Obr. 6 Porovnání výšky výstupu naměřené a vypočtené v závislosti na *b*

Pozn.: Protože hmotnosti špalíků se poněkud liší, je na ose *y* vynesená veličina $h{\cdot}m^2$ (kde *h* je výška výstupu a *m* hmotnost špalíku), která na hmotnosti nezávisí, viz (19).

$$h \cdot m^2 = \left(\frac{3c\left(\frac{c}{2}+b\right)}{2\left(c^2+d^2\right)} \cdot p_\mathrm{D} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g}. \tag{19}$$

Funkce vyjádřená čarami odpovídá výše popsané teorii.

Závěr

Nečekaně vysoký „výskok“ špalíku lze vysvětlit odrazem od Země. Nastává při zásahu do vhodné zóny u špalíku, jehož strany jsou ve správném poměru. Vymrštěný špalík tak může mít větší hybnost než dopadající diabolka. Zákon zachování hybnosti je však splněn, protože nepatrnou část hybnosti (opačným směrem) získala Země.

Literatura

[1] Vybíral B., Šedivý P.: *Mechanika rovinného pohybu tuhého tělesa*. ASTRA PRINT Hradec Králové, 2011.