

Odhad ve fyzice a v životě

VOJTĚCH ŽÁK

Katedra didaktiky fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha
Gymnázium Praha 6, Nad Alejí 1952

Úvod

Součástí fyzikálního vzdělávání by mělo být i rozvíjení dovednosti odhadnout hodnoty různých veličin – např. délky, hmotnosti, ale také množství, což může být užitečné v běžném životě. Obsahem příspěvku jsou některé náměty na odhad a budování představ o velikosti a množství, včetně zkušeností z realizace při výuce.

Odhadování a měření nejsou podle mého názoru dva vzájemně se vylučující procesy. Naopak, mohou se vhodně doplňovat. Jejich přesnější vymezení v rámci tohoto příspěvku je patrné z jejich použití v jednotlivých případech.

Duševní rozcvička – řádové odhady na základě výpočtů z hlavy

1. Jak vysoký by byl barometr, v němž by místo rtuti byla voda?

Odpověď: Zhruba 10 m.

Řešení: Uvážíme-li, že barometr funguje na základě rovnováhy, která se vytvoří mezi atmosférickým tlakem (zhruba roven normálnímu atmosférickému tlaku $p_n = 10^5$ Pa) a hydrostatickým tlakem $p_h = h \cdot \rho \cdot g$ použité kapaliny (zde vody). Z rovnosti $p_n = p_h$ dostáváme po dosazení za hustotu vody $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a za velikost tíhového zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ výšku sloupce vody (rozdíl hladin) $h = 10 \text{ m}$.

2. Představte si, že by vás chtěl někdo vyvážit zlatem. Jaký bude mít zlato objem?

Odpověď: Jednotky litrů.

Řešení: Uvažujme člověka o hmotnosti např. 70 kg. Člověk je tvořen zejména vodou a jelikož je hustota vody $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, zaujímá 1 kg vody objem 1 litru, a tudíž člověk o hmotnosti 70 kg má objem asi 70 litrů. Hustotu zlata si asi nepamatujeme, ale můžeme odhadovat, že je řádově 10krát větší než hustota vody (přesněji: $\rho_{Au} = 19290 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, viz [1]). Podle našeho velmi hrubého odhadu bude mít tedy zlato, které vyváží hmotnost našeho těla, 10krát menší objem, tj. řádově několik litrů (jednotky litrů nikoli desítky či desetiny).

3. Odhadněte hmotnost milionu ocelových kuliček o průměru 1 mm.

Odpověď: Jednotky kilogramů.

Řešení: Použijeme vztah mezi hmotností, hustotou a objemem, tj. $m = \rho \cdot V$. Hustotu oceli odhadneme jako $\rho \approx 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (větší než hustota vody a menší než hustota

zlata). Skutečná hustota (uvedená v [1]) se sice pohybuje mezi $7500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ až $8300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pro různé druhy oceli, ale my klidně vystačíme s velmi přibližným odhadem $\rho \approx 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Objem jedné kuličky je $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ mm}^3 \approx \frac{1}{2} \text{ mm}^3$. (Jedna studentka došla k tomuto odhadu tak, že si řekla, že každá kulička je uvězněna v krychličce o hraně 1 mm, ale protože ji nevyplňuje úplně, budeme uvažovat poloviční objem, tedy $\frac{1}{2} \text{ mm}^3$). 1 000 000 kuliček bude zaujímat objem 1 000 000krát větší, tj. $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$ a po vynásobení odhadovanou hustotou dostáváme 2 až 3 kilogramy, tj. jednotky kilogramů.

4. Kolik molů vody odnesete na zádech?

Odpověď: Tisíce molů tedy jednotky kilomolů.

Řešení: Hmotnost jednoho molu neboli molární hmotnost vody je $M_m = M_r(\text{H}_2\text{O}) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = [2 \cdot A_r(\text{H}) + A_r(\text{O})] \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx (2 \cdot 1 + 16) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Tisíc molů vody má tedy hmotnost 18 kg, což je hmotnost těžšího batohu. Uneseme tedy zhruba tisíc(e) molů vody, tj. jednotky kilomolů.

5. Co je více peněz – jeden vagon desetikorun nebo deset vagonů korun?

Odpověď: Deset vagonů korun.

Řešení: Můžeme vyjít z následující úvahy: Deset vagonů korun by dalo stejnou finanční částku jako jeden vagon desetikorun, pokud by korunová i desetikorunová mince měly stejný objem. Korunová mince je ale menší než desetikoruna, a proto se jich vejde do deseti vagonů víc, a tak je v deseti vagonech naplněných korunami větší peněžní obnos než v jednom vagonu s desetikorunami.

Už jste někdy viděli milion aneb představa o velkých množstvích

Tato aktivita může pomoci žákům vytvořit si představu o velkých množstvích. Je vhodná pro žáky různého věku. Žáky je vhodné rozdělit do větších skupinek (6 až 8 lidí), protože budou slepovat větší množství (asi 20) archů milimetrového papíru. Aktivita má dvě varianty, přičemž postup je ze začátku u obou stejný.

Úkol: *Slepte k sobě tolik archů milimetrového papíru, aby počet milimetrových čtverečků na vzniklém papíře byl zhruba 1 000 000. Vyznačte pak tolik čtverečků,*

- kolik žije obyvatel ve vašem krajském městě; ve městě (vesnici), kde bydlíte; kolik máte spolužáků ve třídě,*
- kolika hodin se dožije 100letý člověk; kolik hodin strávíte na základní škole.*

Pomůcky: dostatečný počet milimetrových papírů (na jednu skupinku asi 20 archů A4), nůžky, lepidlo, pravítko, kalkulačka, psací potřeby

Postup: Jednoduchým výpočtem žáci zjistí, že k získání 1 000 000 milimetrových čtverečků je potřeba asi 20 (přesně 16) milimetrových papírů formátu A4. (Vzniklý papír bude mít obsah zhruba 1 m^2).

a) Počet obyvatel v krajském městě mohou žáci nejprve odhadnout a potom najít přesnější údaj na internetu. Na milimetrovém papíře vyznačí čarou oblast, která bude obsahovat příslušný počet milimetrových čtverečků. Vhodné je navrhnout žákům, aby zvolili zhruba čtvercovou oblast – to je nejnázornější. Pokud je to možné, tak v rámci této oblasti vyznačí oblast představující město (vesnici), kde bydlí. Pokud žáci z jedné skupinky bydlí v různých městech (vesnicích), tak si může každý sám doplnit svoje město (vesnici). Obdobně se postupuje při zvýrazňování počtu spolužáků ve třídě. Jediným „problematickým“ krajským městem je Praha, která má zhruba 1 200 000 obyvatel a která se tudíž na milimetrový papír nemusí vejít. V tomto případě považujeme celý papír za Prahu.

b) Žáci zjistí výpočtem, zhruba kolik hodin se vejde do 100 let. Uvažujeme-li, že rok má průměrně 365 dní a den 24 hodin, dostáváme $n = 100 \cdot 365 \cdot 24 = 876000$. Stoletý člověk se tedy dožije necelých 900 000 hodin, což se může zdát málo (!). Zvýrazňování je dobré provádět obdobně, jak je uvedeno v odstavci a). Kolik hodin strávíme na ZŠ? Vyučovací hodina má sice 45 minut, ale připočteme-li přestávky a čas potřebný na oběd ve školní jídelně, můžeme počítat se 60minutovými hodinami; jde nám přece jen o odhad. Dále předpokládejme, že jsme nepropadli a chodíme tedy na základní školu 9 let. Každý školní rok se dejme tomu učí 33 týdnů a každý týden se odučí 25 hodin. Počet hodin strávených na ZŠ tak zhruba je $p = 9 \cdot 33 \cdot 25 = 7425$. To je necelé 1 % ze 100 let a trochu více než 1 % z průměrného věku, což není zas až tak moc. V tom s Vámi žáci asi nebudou souhlasit ☺ !

Metodické poznámky: Učitel by si měl dopředu rozmyslet, zda žákům povolí používat kalkulačku nebo ne. Pokud jim chcete kalkulačku povolit, doporučuji, aby využili kalkulačku na svých mobilních telefonech, i když to třeba standardně nesmějí. Procvičí se v práci s přístrojem, který nosí stále u sebe. Ve variantě b) je možné, aby žáci spočítali a vyznačili, např. kolik hodin stráví během života v práci. Všechny zjištěné údaje je dobré se žáky diskutovat, a to včetně porovnání počtu jednotlivých hodin. Je vhodné nechat je subjektivně zhodnotit, zda se jim jednotlivé počty zdají velké nebo malé.

Jak dlouhou máme chodbu aneb měření přesnější odhadů?

Tato aktivita je vhodná jako poněkud netradiční úvod do měření, zejména pro mladší žáky. Je nenáročná na pomůcky. Vhodná je práce ve dvojicích.

Úkol: Odhadněte a potom změřte délku školní chodby.

a) Odhadněte délku chodby, když stojíte na jednom jejím konci.

b) Odhadněte délku chodby tak, že jí projdete rychlostí, jakou běžně chodíte, aniž byste se zastavovali.

c) Změřte délku chodby, přičemž smíte použít cokoliv, co nemá měřítko v délkových jednotkách (nesmíte použít pravítko, skládací metr apod.).

Pomůcky: psací potřeby, předměty splňující podmínku v bodě c).

Postup:

a) Žáci si buď tipnou, jak dlouhá je chodba, nebo její délku odhadnou na základě vzdálenosti mezi dveřmi sousedních učeben, šířky oken, vzdálenosti spár na linu apod. Odhadnutý údaj žáci zaznamenají.

b) Při plnění tohoto úkolu asi žáky napadne spočítat, kolik kroků ujdou, a počet kroků vynásobí odhadovanou délkou jednoho kroku. Údaje opět pečlivě zaznamenají.

c) V tomto úkolu žáky většinou rychle napadne vzít nějaký předmět, jehož délku znají. Bývá to např. sešit formátu A4 nebo různé části lidského těla (často rozpažené ruce). Někteří žáci zapálení pro práci si postupně lehají na zem tak, aby jejich polohy navazovaly, až se takto „projdou“, vlastně „proleží“ celou chodbou.

Metodické poznámky: Pokud porovnáme postup a), b) a c), můžeme se domnívat, že nejméně přesný je postup a), přesnější b) a nejpřesnější c). Stává se ovšem, že některá dvojice lépe odhaduje, než měří. Může to být věc náhody nebo systematická chyba, kdy žáci chybně určí délku sešitu apod. Pokud ale spočítáme aritmetický průměr z údajů všech dvojic zvlášť pro a), b) a c), je velmi pravděpodobné, že c) vyjde přece jen přesněji než a) a b). Přesto rozdíly mezi odhady a) a b) a měřením c) nemusí být dramatické.

Co váží víc aneb jak tělesa klamou



Obr. 1: Co je těžší? Nenechte se oklamat velikostí ani materiálem!

Tato aktivita má žákům názorně přiblížit, že určování hmotnosti pouhým „potěžkáním“ je nespolehlivé, protože do něj promítáme zkušenosti, např. že velké nebo kovové předměty bývají těžké.

Úkol: Potězkejte předložené dva předměty (a) větší předmět je lehčí než menší, b) větší předmět je skutečně těžší než menší), tak že jeden uchopíte do pravé ruky a současně druhý do levé.

Pomůcky: těžší menší předmět a lehčí větší předmět – např. laboratorní stojan a hliníkové štafle, těžší větší předmět a lehčí menší předmět – např. plastová láhev s vodou a těžítka, vhodné váhy (osobní a kuchyňské)

Postup: Připravíme první dvojici předmětů – rozměrnější předmět, který bude lehčí než druhý, menší předmět. Vhodné jsou např. hliníkové štafle a laboratorní stojan.

Necháme postupně žáky potěžkávat oba předměty, přičemž je vyzveme, aby slovně ani jinak porovnávání nekomentovali, ale aby si samostatně zaznamenali, který předmět je těžší a který lehčí. Po skončení potěžkávání vše vyhodnotíme – porovnáme jednotlivé odhady a předměty skutečně zvážíme. Provedeme diskuzi (viz Metodické pokyny). Teprve potom budou žáci porovnávat druhou dvojici předmětů.

Metodické poznámky: Většina žáků bude pravděpodobně považovat hliníkové štafle za těžší než výrazně menší stojan. Abychom je přesvědčili, jak je tomu ve skutečnosti, zvážíme oba předměty např. na osobní váze. Položíme-li žákům otázku, proč většina z nich považovala větší předmět mylně za těžší, asi je napadne, že je to právě díky jeho větší velikosti. Protože mají nyní žáci zkušenost, že větší předmět může být lehčí než menší, uplatní ji někteří při porovnávání menšího lehčího předmětu (těžítka) a většího těžšího předmětu (lahve). Během diskuze, proč byla většina zmatena, je dobré poukázat na to, že kovové předměty považujeme obecně mylně za těžké. Hlavním závěrem je, že porovnávání hmotnosti pouhým potěžkáváním je nespolehlivé, ošidné.

Závěr

Bez kalkulačky a dokonce i bez psacích potřeb je možné z hlavy odhadnout pomocí jednoduchých výpočtů hodnoty různých veličin. Představy o velkých množstvích je možné vizualizovat pomocí milimetrového papíru. Měření bývá přesnější než odhad, ale i při odhadování můžeme využít porovnání se známou (nebo přesněji odhadovanou) hodnotou dané veličiny, takže rozdíly mezi měřením a odhadem nemusejí být dramatické, a odhad tudíž není bezcenný. Na druhou stranu je potřeba mít na paměti, že odhad může být ovlivněn subjektivně dalšími okolnostmi, které nemůžeme zcela vyloučit (např. velikost tělesa nebo materiál, ze kterého je těleso vyrobeno, při odhadování jeho hmotnosti porovnáváním s jiným tělesem).

Literatura

- [1] Mikulčák J. a kol.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Prometheus Praha, 1988. ISBN 80-85849-84-4.