

# ZVUKY KMITAJÍCÍCH TYČÍ

BŘETISLAV PATČ, ZŠ BRANDÝS N. L.,

LEOŠ DVOŘÁK, KDF MFF UK PRAHA \*)

## ÚVOD

Za tyče považujeme v akustice pevná pružná tělesa, u kterých převažuje jeden rozměr nad ostatními dvěma. Tyče nenapínáme, neboť mají v tahu, ohybu a torzi vlastní pružnost a můžeme je proto rozechvět vlnami podélnými, příčnými i torzními. Podélné chvění vyvoláme buď třením nebo působením okamžitou silou (úderem) ve směru podélné osy. Příčné chvění vyvoláme úderem k této ose kolmým. Torzní kmity vzniknou v případě, že na tyč působíme třením opačně orientovanými momenty dvojic sil v místě uzlu a kmitny. Rozechvění tyče třením je umožněno rozdílnými hodnotami koeficientů statického a dynamického tření.

Pro rychlost podélné vlny platí vztah

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu (Youngův modul pružnosti) a  $\rho$  hustota materiálu tyče. Odvození lze najít v některých učebnicích mechaniky (viz např. [2]). Rychlost  $c$  postupu podélné vlny v tyči je tedy přímo úměrná  $\sqrt{E}$  a nepřímo úměrná  $\sqrt{\rho}$ .

Rozkmitáme-li volně zavěšenou tyč podélnými kmity, jde o stojaté vlny s kmitnami na obou koncích tyče. Při nejnižší možné frekvenci podélných kmitů má vlnění jediný uzel uprostřed tyče. Vlnová délka je tedy  $\lambda = 2l$ , kde  $l$  je délka tyče. Tyč vyzařuje základní tón s frekvencí

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}.$$

Protože se v tyči mezi krajními kmitnami může vytvořit současně libovolný počet uzlů, platí obecně  $\lambda_k = 2l/k$ , kde  $k$  je počet uzlů a  $\lambda_k$  je délka vlny odpovídající frekvence. Tyč na obou koncích volná vyzařuje všechny harmonické tóny, jejichž frekvence jsou

$$f_k = \frac{k \cdot c}{2l},$$

kde  $k = 1, 2, 3, \dots$

Pro chvění příčné a torzní platí vztahy poněkud komplikovanější (viz např. [3]). Frekvence příčných kmitů závisí i na příčných rozměrech a tvaru profilu tyče.

K demonstraci používáme tyče z materiálů s moduly pružnosti v tahu alespoň  $7 \cdot 10^{10}$  Pa a ve smyku  $3 \cdot 10^{10}$  Pa. Z běžně dostupných kovových slitin jsou to např. bronz, dural, technický hliník, mosaz, ocel a z nekovových materiálů sklo.

Vzhledem k vlastnostem sluchového ústrojí je vnímání zvuku subjektivní. Roli přitom hraje nesterpná citlivost sluchu k tónům různých frekvencí a maskování tónů. Protože tyč vyzařuje

---

\* Článek vychází z příspěvku B. Patče *Chvění tyčí* z Veletrhu nápadů učitelů fyziky 7 [1]. B. Patč navrhl a ověřil všechny pokusy, vyrobil tyče, jejichž chvění se tu rozebírá a demonstruje, a napsal výchozí text článku. L. Dvořák navrhl doplnit příspěvek o spektra a nahrávky zvuků, podílel se na jejich nahrávání, přepracoval a rozšířil text článku a začlenil do něj grafy a zvuky. Za přípravu grafů spekter zvuků s pomocí programu Adobe Audition autoři děkují doktorandovi MFF UK Janu Koupilovi.

určité spektrum harmonických frekvencí různé intenzity, slyšíme složené tóny, charakterizované tzv. barvou. Skladba spektra je ovlivněna různými vlivy, např. způsobem rozkmitání tyče, místem zavěšení nebo volného držení rukou, podélným tvarem tyče nebo mechanickými vlastnostmi tělesa, kterým tyč úderem rozkmitáme. Ucho se ovšem chová jako akustický analyzátor a proto jsme schopni frekvence složeného tónu rozlišit.

## POTŘEBY

Souprava tyčí různých délek, průměrů a materiálů, duté tyče obdélníkového a kruhového průřezu, kovový prstenec, kabelové koncovky, kladívko 100 g, kovové tyčinky opatřené na konci různými povrchy (bužírka, guma, pěnová umělá hmota), velká ložisková kulička, bavlněná látka, klobouková plst, líh, nastavitelná měrka pro uchopení tyče v místech uzlů harmonických frekvencí, vláknový závěs. Tyče jsou popsány v provedení pokusů, uvedené rozměry jsou pouze informativní. Pro nahrávání zvuků potřebujeme počítač se zvukovou kartou, pro analýzu zvuků pak některý z dále zmíněných programů.


## JAK NAHRÁVAT A ANALYZOVAT ZVUKY

Zvuky byly nahrány obyčejným elektretovým mikrofonem, který lze v prodejnách pro elektroniku koupit v ceně 20-30 Kč. Jde o malý váleček o průměru a délce asi 1 cm. K mikrofonu stačí připájet stíněný kablík a k druhému konci kablíku monofonní konektor typu „jack“. Stínění kablíku pájíme k vývodu mikrofonu spojenému s jeho pláštěm a k „vnější“ části konektoru. Mikrofon je pak (se správnou polaritou) napájen přímo z počítače (z konektoru pro mikrofon; bývá značen růžovou barvou). Jako mikrofon můžeme případně využít i některý z levných mikrofonů dodávaných k počítačům.

Časový průběh signálu z mikrofonu (který charakterizuje, jak se s časem mění díky zvuku v malých mezích tlak vzduchu) můžeme nejjednodušeji přímo sledovat některým z programů, které dělají z počítače ze zvukovou kartou osciloskop. (Viz např. programy na tomto CD.) Výhodou těchto programů je skutečnost, že je lze přepnout do režimu zobrazení *spektra*, tedy přímo sledovat frekvence, které jsou ve zvukovém signálu přítomny.

Chceme-li zvuky skutečně nahrát, můžeme využít program *Záznam zvuku*, který je přímo součástí Windows. Zvuk se ukládá ve formátu WAV, který lze později lehce přehrát (např. programem *Winamp* nebo *Windows Media Player* apod.). Ke „komfortnějšímu“ nahrávání, ale zejména k editaci a analýze zvuku se hodí program *CoolEdit*, který v minulosti existoval jako shareware. Později se z něj, již „pod křídly“ firmy Adobe, vyvinul program *Adobe Audition*, nabízející ještě rozsáhlejší možnosti, bohužel však již za cenu několika tisíc Kč. Popis jeho možností by daleko přesáhl rozsah tohoto příspěvku; navíc zde nechceme žádnému z produktů dělat reklamu. Možná narazíte na freewareové či sharewarové programy, které budou vašim potřebám při zpracování a analýze zvuku postačovat.

### A jak si zvuky z tohoto příspěvku přehrát?

V následujícím textu jsou uvedeny grafy, převážně grafy spekter zvuků. Je-li vpravo vedle obrázku zobrazena ikona reproduktoru , můžete si příslušný zvuk přehrát. K tomu stačí klepnout myší na ikonu nebo do grafu daného spektra. Klepněte levým tlačítkem myši, zvuk se ozve po jeho uvolnění. Poprvé bývá před přehráním zvuku malá pauza, pak už by se zvuk měl ozvat prakticky okamžitě.

Pokud se zvuk po klepnutí na ikonu neozve, zkontrolujte prosím i úplné samozřejmosti. (Máte připojeny reproduktory? Jsou zapnuté? Není hlasitost stažena na nulu?) Pokud to nepomůže, proveďte v programu *Ovládání hlasitosti*, zda máte zapnuto „*Zařízení Wave*“ či podobně pojmenované zařízení.. (Přesné jméno zařízení se může na různých počítačích lišit. Nesmí u něj být zaškrtnuto

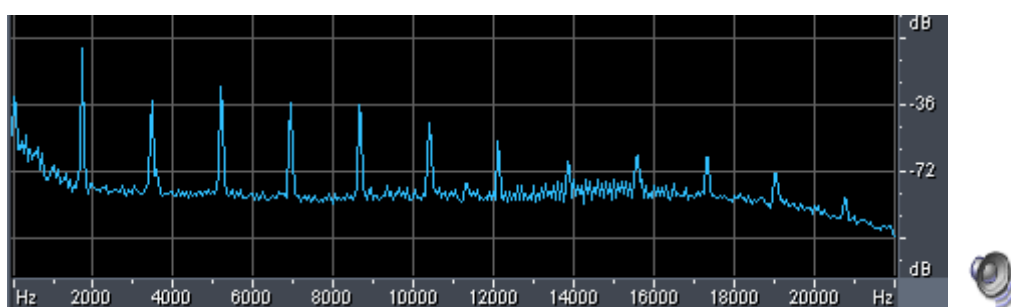
políčko *Ztlumit* a hlasitost nesmí být regulátorem stažena na nulu. Totéž platí u celkového *Ovládání hlasitosti*, kde přirozeně nesmí být zaškrtnuto *Ztlumit vše*.) Samozřejmě, že o zvuky jste ochuzeni i v případě, pokud držíte v rukou vytištěnou verzi tohoto příspěvku... :-)

Ale teď už přistoupíme k popisu provedení pokusů a k ukázkám některých výsledků.

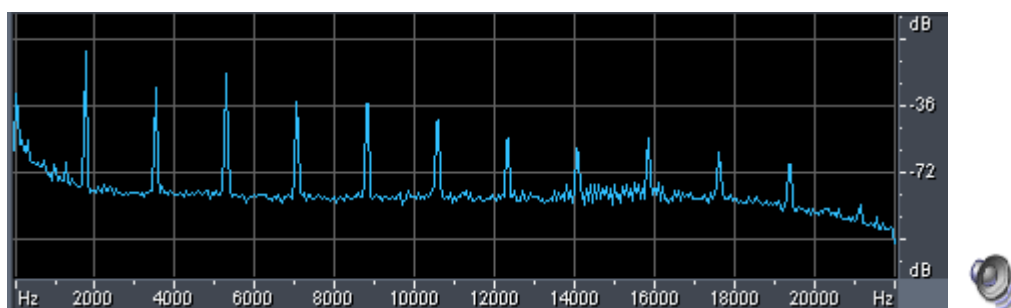
## PODÉLNÉ CHVĚNÍ

### Frekvence nezávisí na průměru tyče

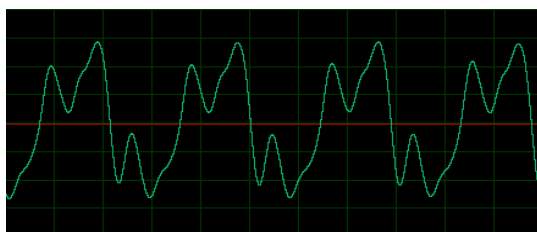
Skleněné trubice délky 130 cm s  $\varnothing$  5 a 7 mm držené rukou v uzlu uprostřed rozechvějeme podélným třením látkou nebo plstí namočenou v lihu. U obou slyšíme základní tón stejné frekvence, neboť tato nezávisí na příčných rozměrech tyče. Spektrum zvuků buzených takto kmitajícími tyčemi a příslušné časové průběhy ukazují obr. 1, 2, 1a, 2a:



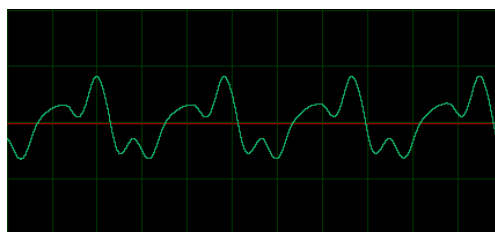
Obr. 1. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity skleněné trubice o  $\varnothing$  5 mm držené uprostřed



Obr. 2. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity trubice stejné délky o  $\varnothing$  7 mm držené uprostřed



Obr. 1a. Časový průběh zvuku, jehož spektrum je na obr. 1



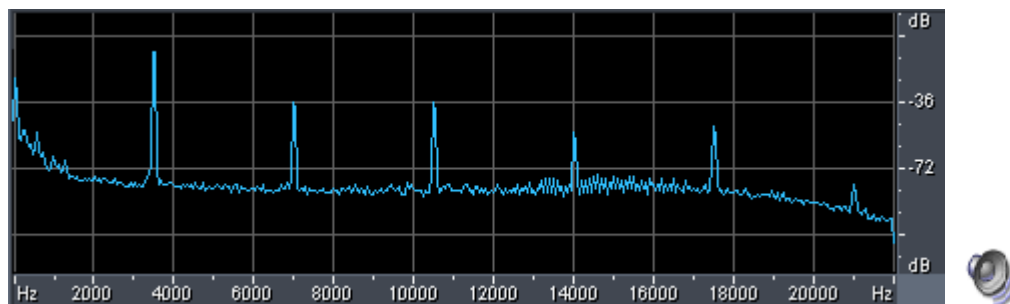
Obr. 2a. Časový průběh zvuku, jehož spektrum je na obr. 2

Poznamenejme, že ve skutečnosti se frekvence kmitání obou tyčí přece jen mírně liší. Rozdíl činí méně než 30 Hz, což při frekvencích okolo 1750 Hz je jen asi 1,7%. Přitom průměry tyčí se liší o 40%. Rozdíl by mohl být dán i tím, že u různých tubic nemáme zaručeny naprosto stejné vlastnosti materiálu, např. hodnotu modulu pružnosti.

Frekvence základního tónu pro oba průměry tyče je tedy opravdu prakticky shodná. Ve spektru názorně vidíme, že vyšší frekvence jsou celočíselnými násobky základní frekvence. (Mluvíme o „vyšších harmonických“.)

### Frekvence závisí na místě, kde tyč držíme

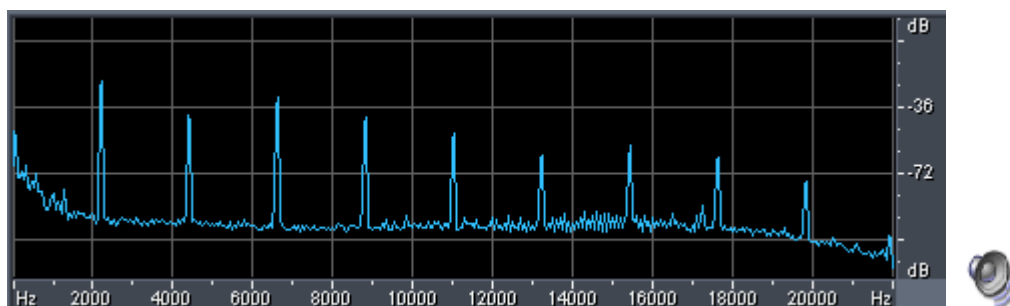
Totéž demonstrujeme při držení stejných tyčí v uzlu v  $\frac{1}{4}$  délky. Slyšíme tón první vyšší harmonické frekvence. Při přejíždění látky v okolí protilehlého uzlu tyč nezní.



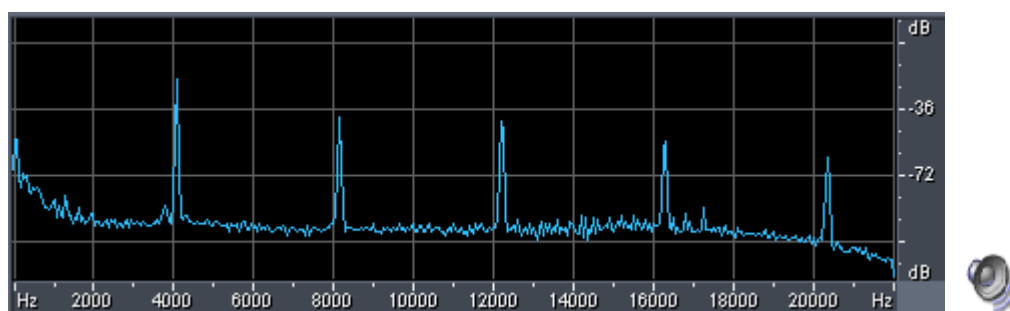
Obr. 3. Spektrum podélných kmitů stejné skleněné trubice držené v uzlu v  $\frac{1}{4}$  délky

### Frekvence závisí na délce tyče

Skleněné trubice o délkách 119 a 65 cm o  $\varnothing$  7 mm držíme v uzlu uprostřed. Kratší tyč vydává vyšší tón základní frekvence.



Obr. 4. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity skleněné trubice délky 119 cm o  $\varnothing$  7 mm držené uprostřed



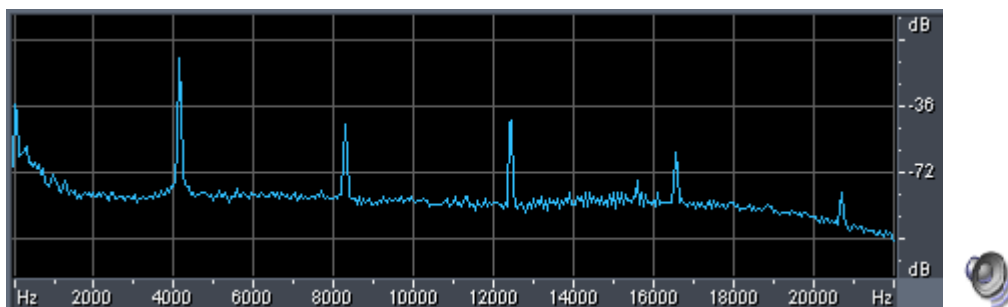
Obr. 5. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity skleněné trubice délky 65 cm o  $\varnothing$  7 mm držené uprostřed

Měření základních frekvencí dají hodnoty 2210 Hz a 4083 Hz. Jejich poměr s přesností asi 0,9% odpovídá převrácené hodnotě poměru délek tyčí. To je v souladu s teorií, podle níž je frekvence nepřímo úměrná délce tyče.

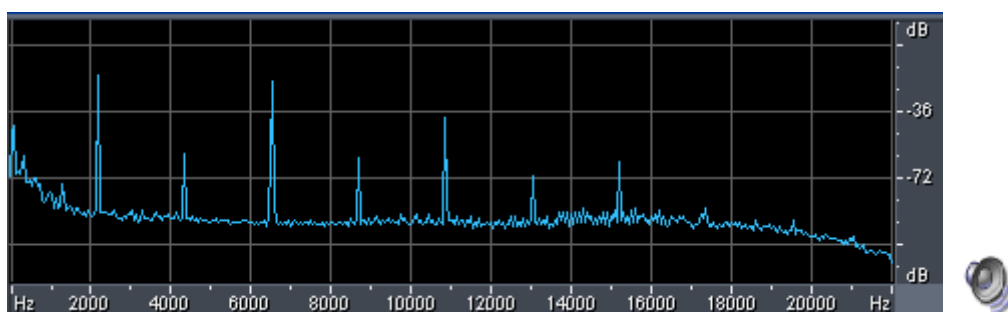


## Frekvence závisí na modulu pružnosti materiálu tyče

S dvojicí tyčí z technických hliníků s různým modulem pružnosti v tahu délky 119 cm o  $\varnothing$  6 mm, které mají prakticky stejnou hustotu, provádíme obdobné pokusy jako s tyčemi skleněnými v bodě a). Tyč z materiálu s vyšším modulem pružnosti vydává tóny vyšších frekvencí.




Obr. 6. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity tyče délky 119 cm o  $\varnothing$  6 mm držené uprostřed – tyč z materiálu s vyšším modulem pružnosti



Obr. 7. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity hliníkové tyče délky 119 cm o  $\varnothing$  6 mm držené uprostřed – tyč z materiálu s nižším modulem pružnosti

Spočteme-li v tomto případě (pro materiál s nižším modulem pružnosti) rychlost šíření zvuku v hliníku (podle vztahu  $c = f\lambda$ , kde  $\lambda = 2l = 2,38$  m a naměřená hodnota  $f = 2177$  Hz), dostaneme hodnotu asi 5180 m/s, což dobře souhlasí s tabulkovou hodnotou. (Učebnice akustiky, např. [4], nás ovšem poučí, že rychlost zvuku v tenké tyči není přesně rovna rychlosti zvuku v nekonečném prostředí ze stejného materiálu, ale je poněkud nižší.) Tyč, jejíž spektrum zvuku ukazuje obr. 6, je zřejmě ze slitiny s výrazně vyšším modulem pružnosti.

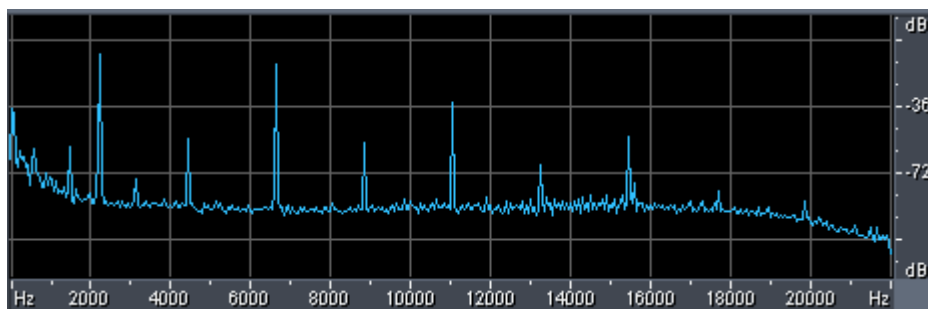
## Útlum kmitů tyče

Tyč z technického hliníku délky 117 cm o  $\varnothing$  14 mm držíme v uzlu uprostřed a silně do ní udeříme ve směru podélné osy. Tím kromě podélného vyvoláme nechtěně i chvění příčné, které však brzy odezní a tyč pak vydává dominantně tón základní frekvence, který zní slyšitelně po dobu asi dvě a půl minuty. Zde uvádíme ukázkou v délce necelých 40 sekund:  STOP

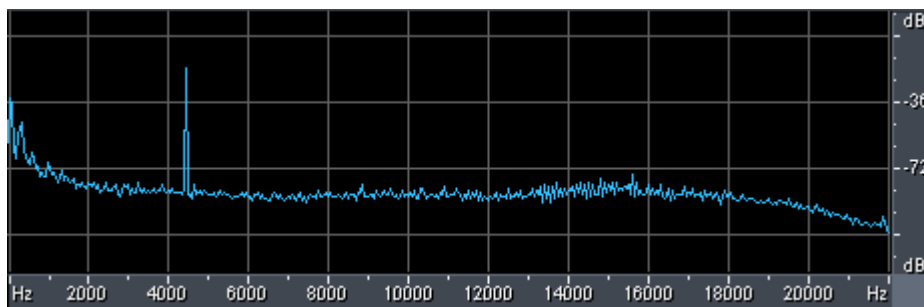
Jestliže při tom tyč uprostřed zavěsíme a roztočíme, slyšíme rázy, modulované kruhovou frekvencí rotující tyče.

## Závislost frekvence na místě držení tyče – podrobněji

Tyč z předchozího pokusu (hliníkovou tyč délky 117 cm o  $\varnothing$  14 mm) držíme podle měřky postupně v  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  a  $\frac{1}{8}$  délky. Po jejím rozkmitání slyšíme nejprve tón základní a dále tóny vyšších harmonických frekvencí, v našem případě dvojnásobku, trojnásobku a čtyřnásobku základní frekvence. Držením tyče v konkrétním uzlu tlumíme ty frekvence, které v tomto místě uzlu nemají.



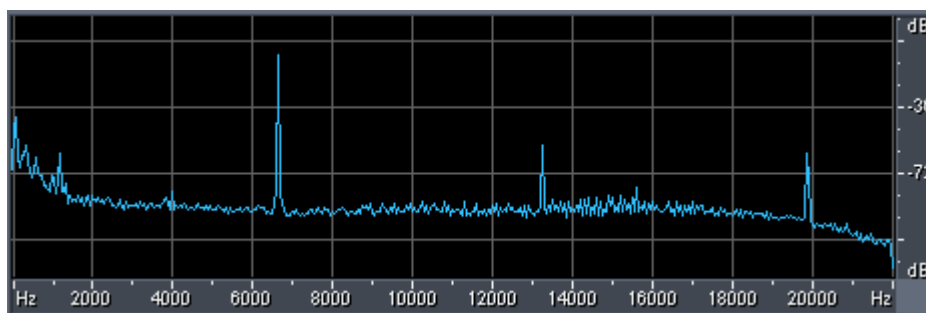
Obr. 8. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity hliníkové tyče dlouhé 117 cm držené v  $\frac{1}{2}$  délky



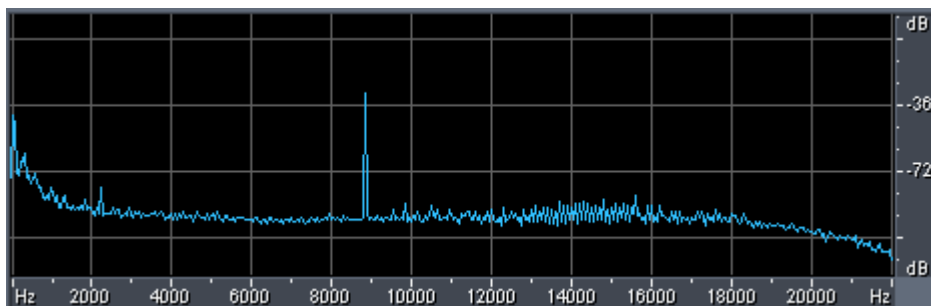
Obr. 9. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity hliníkové tyče dlouhé 117 cm držené v  $\frac{1}{4}$  délky

Držíme-li tyč v jedné čtvrtině, nemůže se vybudit kmity se základní frekvencí. (Tyč by v místě, kde ji držíme, musela kmitat.) Zde se navíc „díky“ držení v prstech podařilo utlumit i vyšší harmonické frekvence, takže ve spektru vidíme jen jedinou frekvenci.

V následující ukázce, při držení tyče v jedné šestině, se povedlo držet tyč tak šikovně, že ve spektru jsou i násobné frekvence:



Obr. 10. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity hliníkové tyče dlouhé 117 cm držené v  $\frac{1}{6}$  délky



Obr. 11. Spektrum zvuku buzeného podélnými kmity hliníkové tyče dlouhé 117 cm držené v  $\frac{1}{8}$  délky

Při držení v tyče v jedné osmině se již opět vyšší frekvence utlumily. Pokud bychom tyč drželi v jedné šestnáctině, byla by frekvence kmitů již téměř 18 kHz (měření v našem případě dalo hodnotu 17720 Hz), což již, kromě mladých lidí se zdravým sluchem, většina lidí neuslyší. Navíc je těžké držet tyč v natolik přesném místě, abychom dané kmity opravdu vybudili.

---

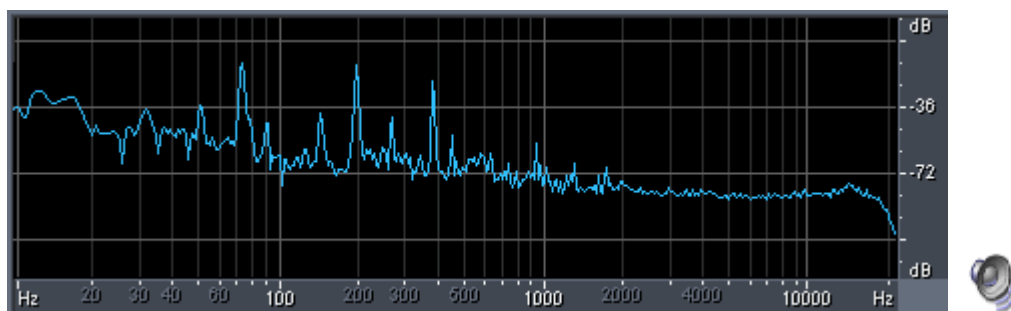
## PŘÍČNÉ CHVĚNÍ

Příčné kmity tyčí jsou složitější než podélné. S rostoucí délkou  $l$  frekvence neklesá jako  $1/l$ , ale jako  $1/l^2$ . Navíc jednotlivé frekvence, kterými daná tyč kmitá, nejsou v poměru celých čísel – tedy *nejsou navzájem harmonické*.

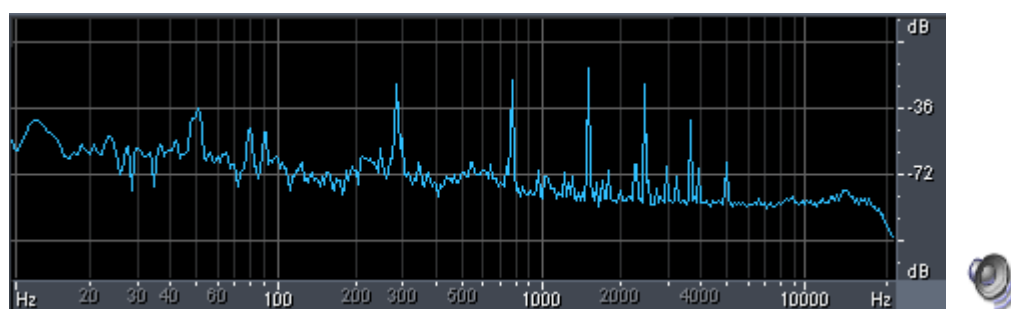
### Závislost frekvence příčných kmitů na délce tyče

Ocelové tyče délky 80, 40 a 20 cm o  $\varnothing$  10 mm na konci volně zavěsíme a kolmým úderem kovovou tyčinkou potaženou bužírkou do jejich konce je postupně rozkmitáme. Kratší tyč vydává složený tón vyšších frekvencí.

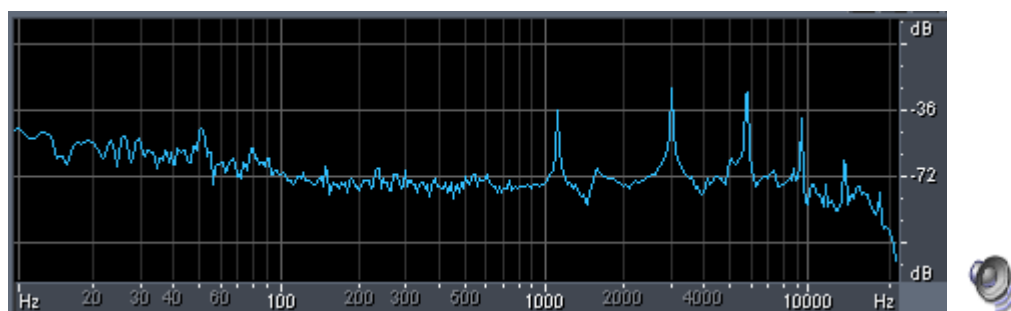
Pro přehlednost je v následujících grafech frekvence vynášena v logaritmickém měřítku.



Obr. 12. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 80 cm



Obr. 13. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 40 cm

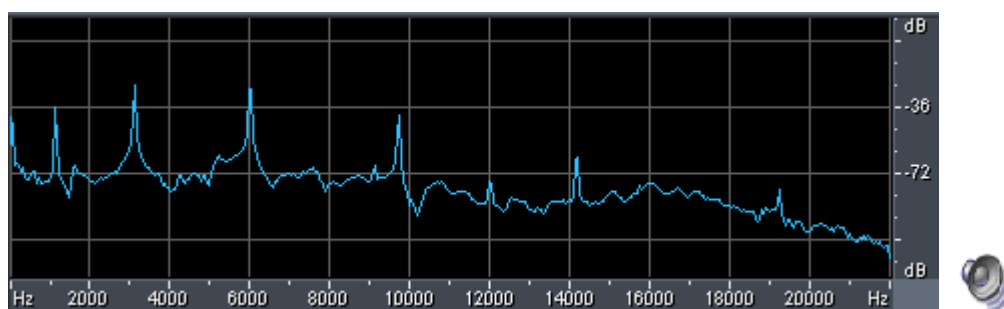


Obr. 14. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 20 cm

Základní frekvence kmitů pro délky 80, 40 a 20 cm jsou asi 72 Hz, 288 Hz a 1147 Hz – tedy opravdu v poměru druhých mocnin poměru délek tyčí. (Pro tyče 80 a 40 cm vychází poměr frekvencí 1:4 naprosto přesně, pro tyče 80 a 20 cm vychází poměr 1:15,93, což se od teoretické hodnoty liší o méně než o procento.)

### Frekvence jednotlivých módů příčných kmitů tyče

Skutečnost, že jednotlivé kmity (resp. *módy* kmitání) mají frekvence, jež nejsou v poměru celých čísel, je lépe vidět, když frekvenci vyneseme v lineárním měřítku:

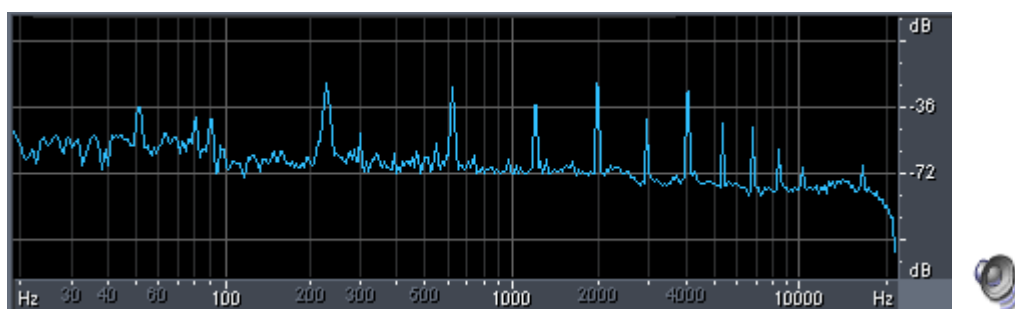


Obr. 15. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 20 cm

V učebnicích můžeme zjistit, že pro tyč na obou koncích volnou jsou poměry prvních dvou vyšších frekvencí k frekvenci základní asi 2,75 a 5,40. (Přesněji: jsou dány poměrem druhých mocnin čísel  $m$ , které jsou řešením rovnice  $\cos m \cdot \cosh m = 1$ .) První tři frekvence ve spektru na obr. 15 tomu opravdu odpovídají. (Přesnější měření pomocí programu Adobe Audition dávají frekvence 1147 Hz, 3126 Hz a 6025 Hz. Poměry frekvencí k nejnižší vycházejí 2,725 a 5,253. Od teoretických hodnot se tedy liší méně než o 3%. Pro frekvence vyšších módů vycházejí poněkud větší odchylky, patrně proto, že se projevuje konečná tloušťka tyče. V případě tyče o délce 40 cm se poměry prvních čtyř vyšších frekvencí od frekvence základní neliší od teoretických hodnot o více než asi 2%.)

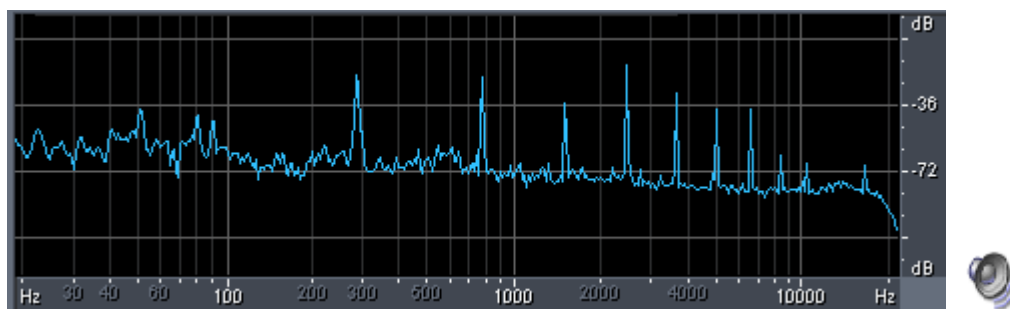
### Závislost frekvence příčných kmitů na tloušťce tyče

S ocelovými tyčemi délky 40 cm o  $\varnothing$  8, 10 a 26 mm provedeme obdobný pokus. Protože větší příčný rozměr tyče značně zvyšuje její tuhost v ohybu a tím i rychlost postupu příčné vlny, vydává silnější tyč tón vyšší frekvence.



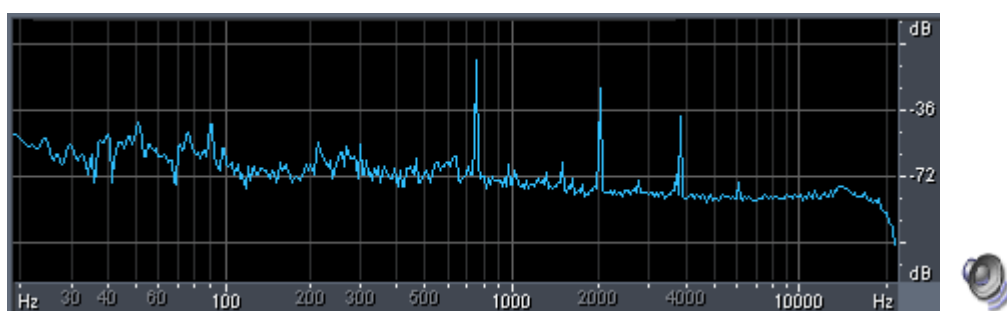
Obr. 16. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 40 cm o  $\varnothing$  8 mm

Pro tyč o průměru 8 mm je základní frekvence kmitání necelých 230 Hz. Podle teorie je frekvence úměrná průměru tyče. Pro tyč o průměru 10 mm by tedy základní frekvence kmitání měla být 1,25-krát vyšší, tedy necelých 287 Hz. Jaká je skutečnost, ukazuje obr. 17.



Obr. 17. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 40 cm o  $\varnothing$  10 mm

Skutečná naměřená frekvence je 288 Hz. Poměr frekvencí se od teoretické hodnoty liší jen o 0,6%. Podobně, byť s poněkud větší odchylkou, je tomu pro tyč o průměru 26 mm:



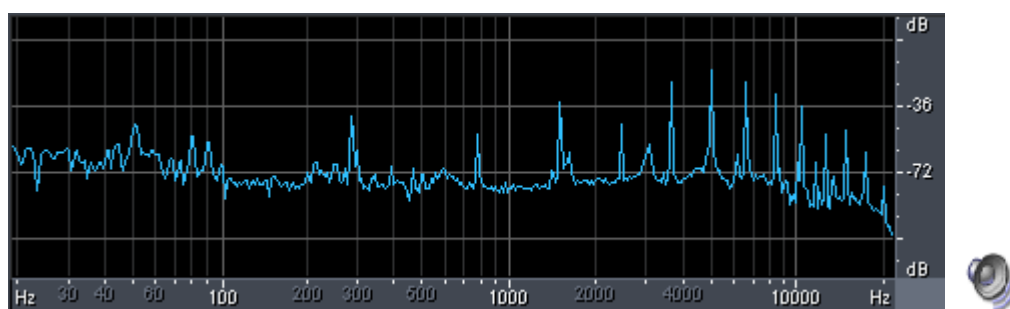
Obr. 18. Spektrum příčných kmitů ocelové tyče délky 40 cm o  $\varnothing$  26 mm

Naměřená hodnota základní frekvence je 767 Hz. Poměr k základní frekvenci tyče o  $\varnothing$  8 mm se od teoretické hodnoty liší o necelá 3%.

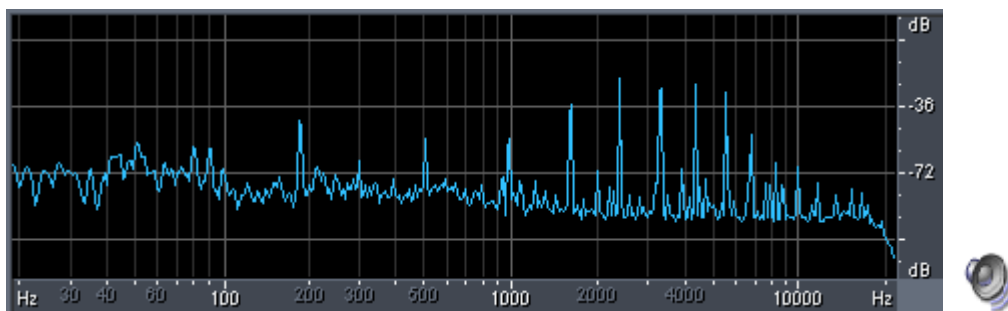
### Závislost frekvence příčných kmitů na materiálu tyče

Další obdobný pokus provedeme s tyčemi délky 40 cm o  $\varnothing$  10 mm z hliníku, oceli a bronzu. Rychlost postupné vlny je v tomto případě závislá na modulu pružnosti v tahu a hustotě materiálu tyče a výška tónu závisí na kombinaci obou vlivů. (Je úměrná  $\sqrt{E/\rho}$ .)

Obrázky 19 a 20 ukazují spektra příčných kmitů ocelové tyče a tyče z bronzu. Základní frekvence pro ocelovou tyč je 288 Hz, pro tyč z bronzu (který má nižší hodnotu  $E$ ) je to 186 Hz.



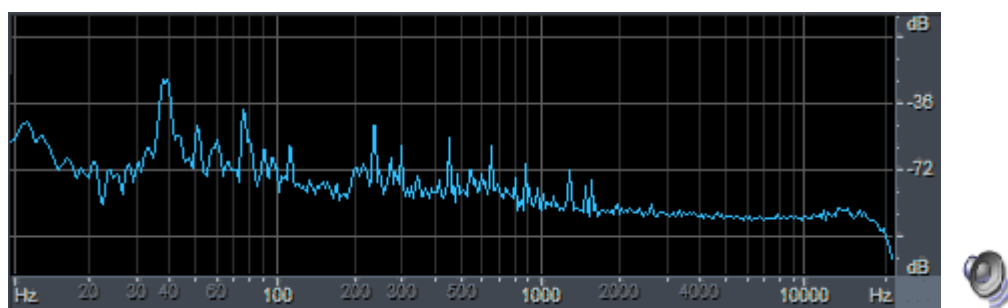
Obr. 19. Spektrum příčných kmitů tyče (délky 40 cm o  $\varnothing$  10 mm) z oceli



Obr. 20. Spektrum příčných kmitů tyče (délky 40 cm o  $\varnothing$  10 mm) z bronzu

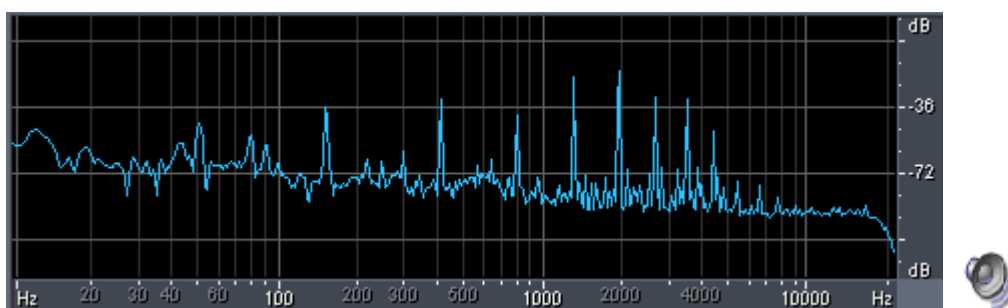
### Závislost frekvence a spektra příčných kmitů na tvaru tyče

K pokusu použijeme ocelové tyče délky 70 cm o  $\varnothing$  8 mm, z nichž jedna je rovná, druhá ohnutá do tvaru písmene U. Tyč ohnutá do tvaru U vydává tón nižší frekvence (v našem případě je základní frekvence necelých 38 Hz), poměry frekvencí jsou jiné, než u přímých tyčí a jasně je vidět, že základní frekvence je ve spektru mnohem výraznější, než vyšší frekvence.



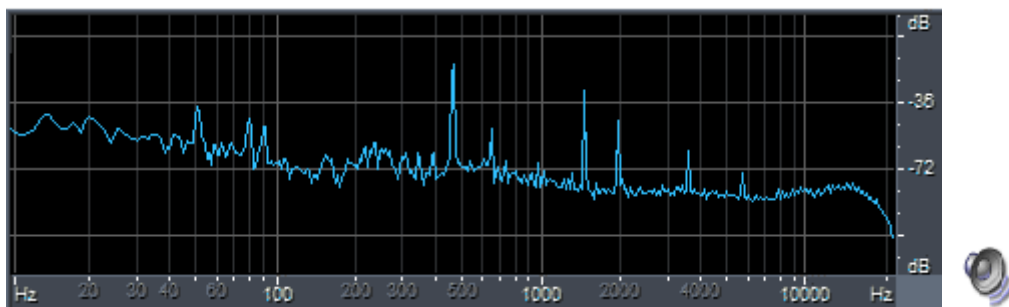
Obr. 21. Spektrum příčných kmitů tyče ohnuté do tvaru U

Dutá ocelová tyč kruhového průřezu délky 70 cm o  $\varnothing$  13 mm volně zavěšená vydává složený tón připomínající tón zvonu. Poměry frekvencí jsou jiné než u plných tyčí.

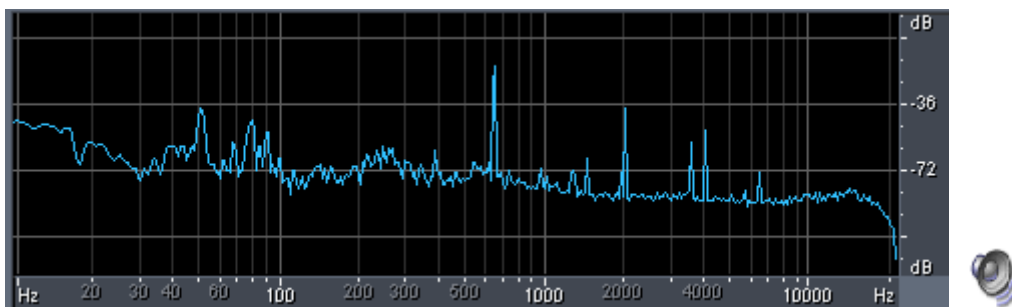


Obr. 22. Spektrum příčných kmitů duté ocelové tyče

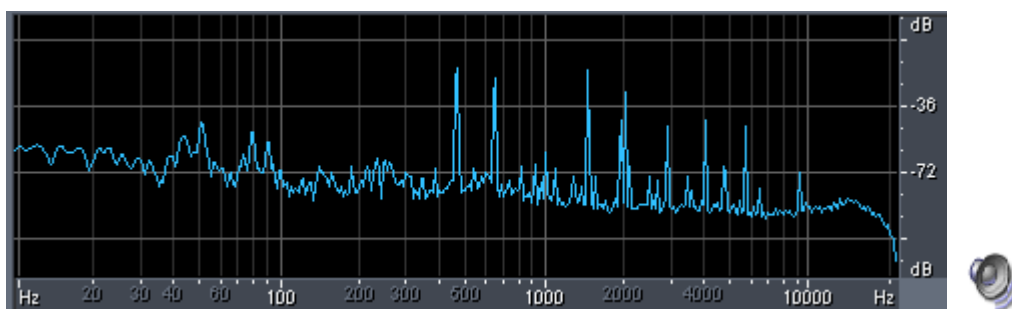
Dutou ocelovou tyč délky 60 cm obdélníkového průřezu 12x18 mm držíme rukou uprostřed a rozkmitáme ji postupně úderem do protějších stěn. Rychlost postupné vlny je v obou případech různá a tyč rozkmitaná úderem do užší stěny vydává tón vyšší frekvence. Při úderu ve směru úhlopříčky průřezu znějí oba tóny současně, jak to ukazuje obr. 25. (V našem případě mají základní frekvence hodnoty 473 Hz a 660 Hz.)




Obr. 23. Spektrum příčných kmitů duté tyče obdélníkového průřezu, do níž jsme uhodili z širší strany

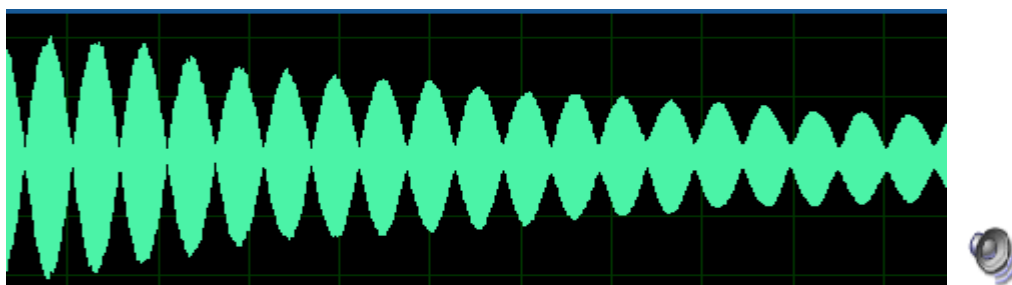


Obr. 24. Spektrum příčných kmitů duté tyče obdélníkového průřezu, do níž jsme uhodili z užší strany

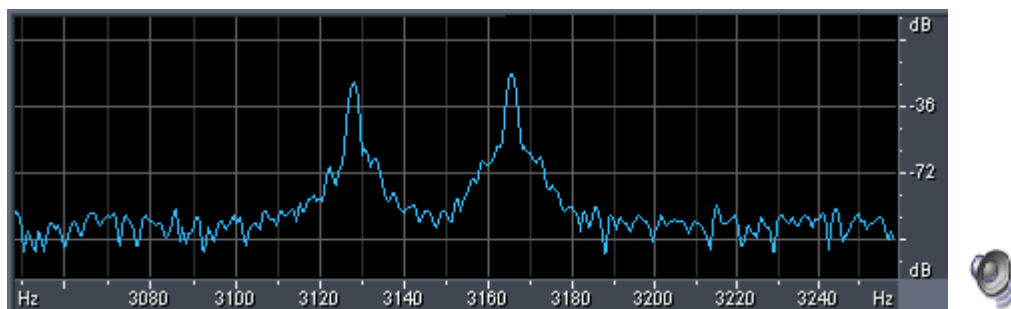


Obr. 25. Spektrum příčných kmitů duté tyče obdélníkového průřezu, do níž jsme uhodili úhlopříčně

Větší mosazné kabelové koncovky (150 A), tvarem připomínající ladičku, vydávají po rozkmitání úderem prakticky jen základní frekvenci. (Ve spektru jsou ještě dvě vyšší frekvence potlačené o více než 20 dB. Spektrum zde neuvádíme, zkuste si sami analyzovat zvuk ) Protože se tato u jednotlivých vyrobených kusů většinou o málo liší, slyšíme po vzájemném úderu dvou koncovek rázy. U jiné dvojice pak můžeme slyšet jinou frekvenci rázů.



Obr. 26. Časový průběh zvuku dvou kabelových koncovek – rázy



Obr. 27. Spektrum zvuku dvou kabelových koncovek (stejný zvuk jako u obr. 26)

### Další možné pokusy

Dále uvádíme již jen náměty na další pokusy, bez prezentace zvuků a spekter.

Hliníkovou tyč délky 130 cm o  $\varnothing$  14 mm držíme nejprve uprostřed a úderem ji rozkmitáme. Dále postupujeme tak, že místo držení postupně posouváme asi o 5 mm ke konci tyče. Pokud se tyč po úderu rozezní, je držena v uzlu některé frekvence. Tímto způsobem můžeme uzly frekvencí vyhledat. Držíme-li tyč na konci, nezní, protože tlumíme všechny frekvence, neboť tyto mají na konci tyče vždy kmitnu.

Tyč z předchozího pokusu uprostřed volně zavěsíme a příčně rozkmitáme nejprve kovovou tyčinkou a dále postupně tyčinkou opatřenou na konci bužírkou, gumou a pěnovou umělou hmotou. Při úderu kovem je působení síly na tyč krátkodobé, což vyvolává zřetelně i vysoké harmonické frekvence. Tyčinka s měkkým povrchem, která se při úderu dotýká tyče po značně delší dobu, vybudí spíše nižší frekvence, což se projeví jinou barvou tónu.

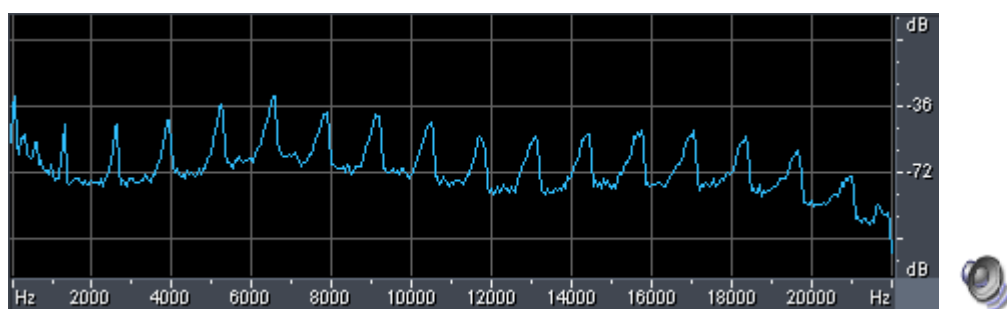
Stejnou tyč rozkmitáme podélně a zároveň i příčně. Všechny vyvolané frekvence obou druhů chvění slyšíme současně.

---

### TORZNÍ CHVĚNÍ

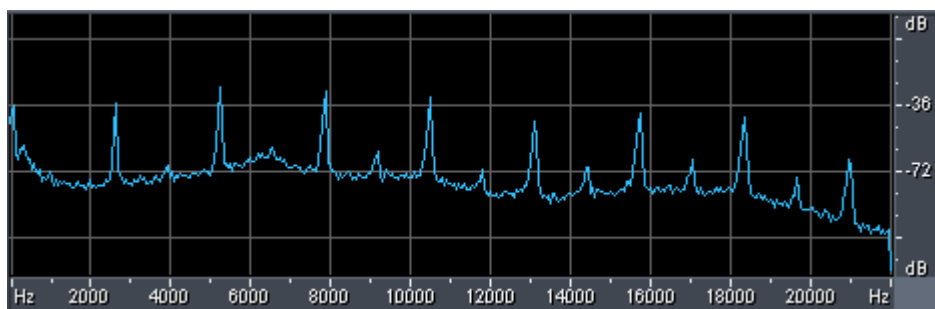
Torzní chvění demonstrujeme obdobně a se stejnými tyčemi jako v pokusech s podélnými kmity skleněných tyčí. Tyče držíme rukou v uzlu uprostřed nebo v  $\frac{1}{4}$  délky a třeme torzně v kmitně na konci tyče plstí namočenou v lihu.

V následujících obrázcích stručně uvádíme příklady spekter několika zvuků buzených torzními kmity hliníkových a skleněných tyčí. Frekvence jsou zobrazeny v lineární škále – je vidět, že vyšší frekvence jsou celočíselnými násobky základní frekvence. (Pro frekvence torzních kmitů tyčí platí stejný vztah jako pro frekvence jejich podélných kmitů; pouze ve vztahu pro rychlost zvuku musíme místo modulu pružnosti v tahu  $E$  dosadit modul pružnosti ve smyku  $G$ .)

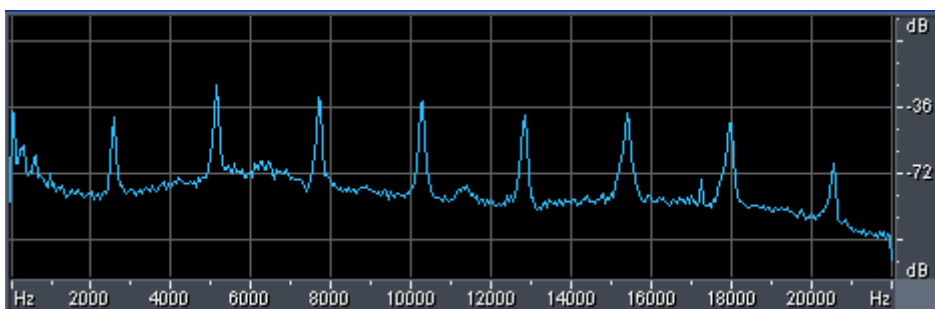


Obr. 28. Spektrum torzních kmitů hliníkové tyče držené v polovině

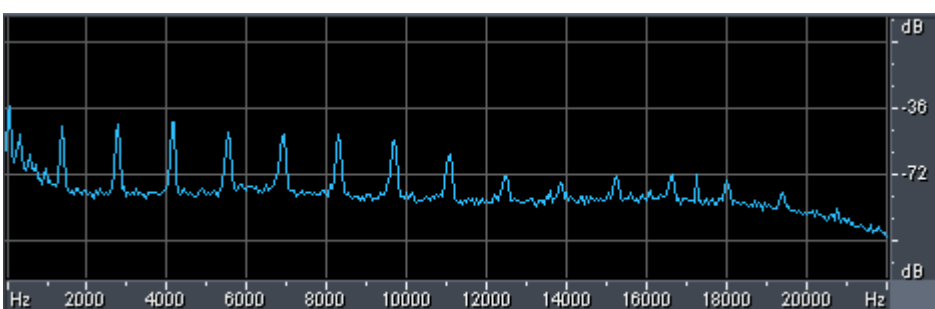




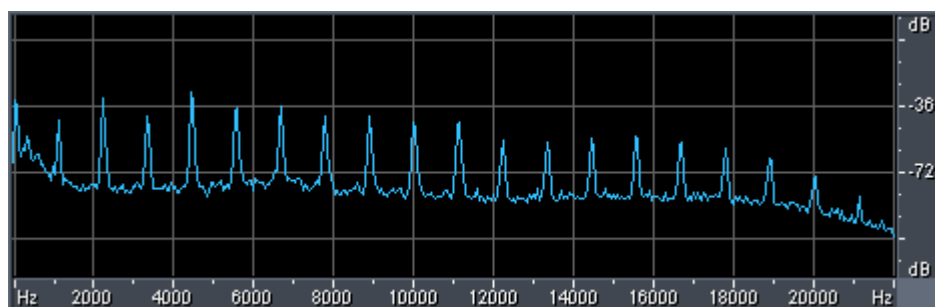
Obr. 29. Spektrum torzních kmitů hliníkové tyče držené ve čtvrtině



Obr. 30. Spektrum torzních kmitů krátké skleněné tyče



Obr. 31. Spektrum torzních kmitů středně dlouhé skleněné tyče



Obr. 32. Spektrum torzních kmitů dlouhé skleněné tyče

---

## ZÁVĚR

Čím ze zde prezentovaného obohatit vlastní výuku či mimoškolní práci, je už věcí každého čtenáře (resp. „posluchače“) tohoto příspěvku. Záměrem autorů bylo dát o kmitání tyčí alespoň základní představu a ukázat, že se dnes s pomocí počítače s touto oblastí můžeme seznamovat i jinak, než jen pomocí teoretických vzorečků.

## LITERATURA

- [1] Patč B.: *Chvění tyčí*. In: Sborník konference *Veletrh nápadů učitelů fyziky 7*. Ed. E. Svoboda, L. Dvořák. Prometheus, Praha 2002. s. 47-48.
- [2] Kvasnica J., Havránek A., Lukáč P., Sprušil S.: *Mechanika*. Academia, Praha 1988, 2004.
- [3] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2000.
- [4] Škvor Z.: *Elektroakustika a aplikovaná akustika*. Skriptum ČVUT. Vydavatelství ČVUT, Praha 1994.