

# Chladniho obrazce bez smyčce a s mobilním telefonem

Alice Kutnarová, Lukáš Richterek

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého, Olomouc

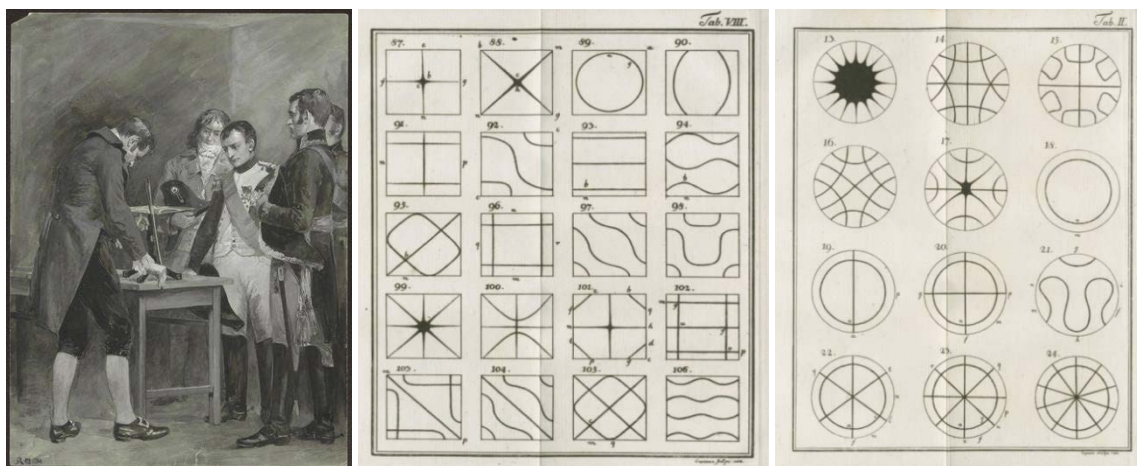
## Abstrakt

*V příspěvku představujeme výstup bakalářské práce – dvě jednoduchá zařízení k demonstraci Chladniho obrazců a získané obrazce spolu s odpovídajícími charakteristickými frekvencemi. Jako frekvenční generátor využíváme mobilní telefon nebo tablet.*

## Úvod a motivace

Chladniho obrazce jsou zajímavým fyzikálním jevem nejenom pro lidské oko, ale také pro ucho, představují jeden z příkladů „vnímání fyziky více smysly“. Jsou zmiňovány v řadě učebnic a patří k repertoáru vděčných školních výukových experimentů z oblasti akustiky.

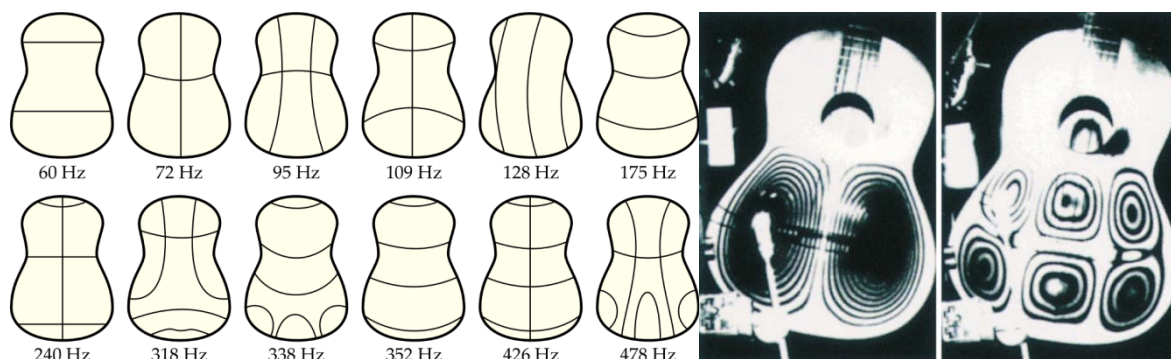
Jako jeden z prvních historicky zaznamenaných pokusů tohoto typu se uvádějí experimenty Roberta Hooka z 8. 7. 1680, při nichž smyčcem rozezníval skleněnou desku posypanou moukou (některé zdroje zmiňují i Galileiho pokusy s kovovými deskami z roku 1638) [1 a odkazy tam uvedené]. Nejvíce je však proslavil německý fyzik a hudebník nazývaný také „otcem akustiky“ Ernst Florens Friedrich Chladni (30. 11. 1756 Wittenberg – 3. 4. 1827 Vratislav), jehož pradědeček Georg Chladni (1637–1692) pocházel ze slovenské Kremnice, ale v době rekatolizace odešel do Německa. Ernst Chladni se zabýval především měření rychlosti podélných zvukových vln v pružných tělesech a vyslovil teorii o kosmickém původu meteoritů (v roce 1794, potvrzena byla Jeanem-Baptistem Biotem 1803). Chladni zaznamenal obrazce v publikaci [2] a předváděl je při návštěvě Paříže i Napoleonovi (obr. 1).



Obr. 1. Vlevo Chladni demonstruje své obrazce před Napoleonem roku 1809 v Tuilerijském paláci [3], uprostřed a vpravo ukázky z Chladniho práce *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* [2].

Princip vzniku Chladniho obrazců je dnes využíván při výrobě hudebních nástrojů nebo při stavbě hudebních prostor. Zákonitosti kmitání desek se využívají nejenom k výběru vhodného materiálu na výrobu hudebního nástroje, ale také k jeho tvarování. Houslové

desky jsou složitějšího tvaru („vykrojené“ a prohnuté) a mají mnoho vibrujících módů. Chladniho obrazce se zpravidla vytváří na desce ve tvaru houslí, která je ale rovná (na „průřezu“ tělem houslí). Také se studují případy, kdy okraje desky jsou upnuté nebo volné. Nejlépe studované módy s nejnižší frekvencí jsou užitečné pro tvarování desek a celkovou konstrukci nástroje.



Obr. 2. Vlevo Chladniho módy na desce tvaru kytary [1], vpravo interferenční hologramy mapující kmitny na ozvučné desce kytary [4].

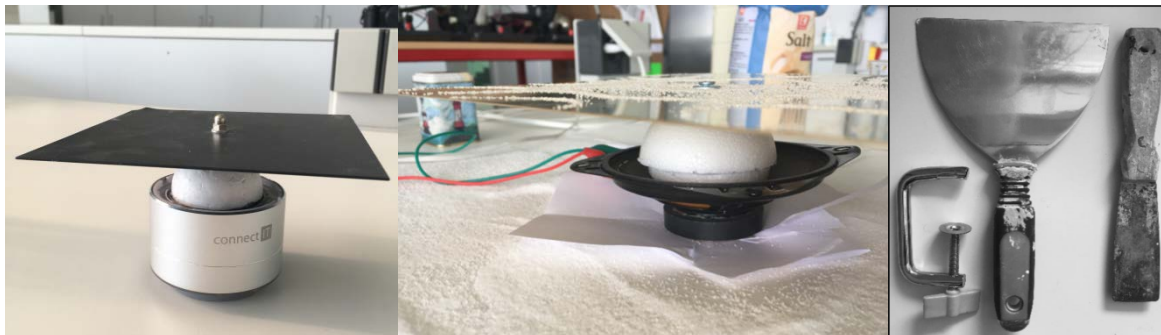
U kytar desky také vibrují mnoha způsoby. Při nízkých frekvencích se módy podobají módům na obdélníkové desce. Jejich tvar a frekvence závisí na okrajových podmínkách a na výztuhách umístěných uvnitř kytary (obr. 2). Chladniho obrazce se rovněž využívají u dalších hudebních nástrojů jako např. u bicích nástrojů, kde jsou používány bubny s membránou s upnutým okrajem, nebo u těla klavírů a varhan.

Současné technologie umožňují k mapování kmitů desek využít tzv. holografickou interferometrii. Metoda je založena na interferenci dvou vlnění laserového světla, která původně neexistovala ve stejném čase (je tzv. dvoukroková). Nejprve kamera zaznamená hologram původního stavu tělesa, následně je těleso rozvibrováno (změní se jeho stav) a dojde ke změně fáze. Prvotní hologram je přenesen na deformovaný objekt, čímž se překryjí oba obrazy, a tam, kde došlo ke změně, se vytvoří interferenční obraz (interferogram). Interferenční proužky na interferogramu znázorňují kmitny pohybujícího se povrchu (obr. 2).

## Sestava a použité pomůcky

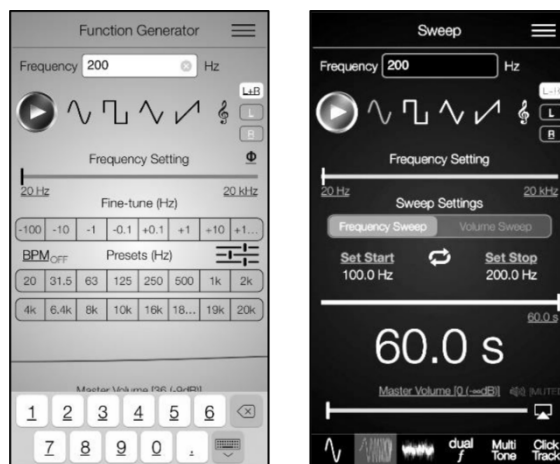
Jedním z cílů experimentu bylo nahradit tradiční rozeznávání desky smyčcem generováním tónů pomocí „chytrého“ mobilního telefonu nebo tabletu a reproduktoru. Při přenosu kmitů z reproduktoru na desku byl využit postup popsáný v [5]. K sestavení aparatur jsme v jednom případě využili bezdrátový reproduktor značky connectIT® model CI-1227 (Bluetooth) s odstraněným kovovým krytem, ve druhém klasický reproduktor s papírovou membránou YD103-01F (8  $\Omega$ , 2 W, k propojení s telefonem nebo tabletem je v tomto případě nutný konektor jack 3,5 mm). Zvuk lze zesílit v případě potřeby zesilovačem v reproduktoru. Ke generování tónů byl použit iPhone s nainstalovanou aplikací *Audio Function Generator* (v případě systémů založených na Androidu nebo při použití notebooku by bylo nutné zvolit ekvivalentní aplikaci jako např. *Frequency Sound Generator* nebo *Audacity*). Desky (čtvercová a kruhová) z černé lakované oceli o tloušťce 1,3 mm a hraně 140 mm z demonstrační soupravy Frederiksen Scientific, která byla zakoupena pro laboratoř školních pokusů na PŘF UP ([int.frederiksen.eu/shop/product/chladni-plates--square--metal](http://int.frederiksen.eu/shop/product/chladni-plates--square--metal)), i mosazná deska

o tloušťce 0,5 mm a hraně 200 mm byly přes šroub nebo vrut s podložkou zapíchnuty do části polystyrenové koule o průměru asi 30 mm přilepené ke kmitající části reproduktoru tavnou pistolí. Tavnou pistolí nebo lepicí gumou bylo zajištěno vsunutí desky s vrutem (nebo šroubem) a podložkou do polystyrenové polokoule. Z dalších pomůcek byly potřeba propojovací vodiče, nůž na rozřezání polystyrenové koule a krupice, písek nebo sůl, jimiž jemně posypeme horní stranu desky (obr. 3).



Obr. 3. Různá použitá uspořádání experimentu: Bluetooth reproduktor s tlustší čtvercovou deskou ze soupravy Frederiksen Scientific (vlevo), tenčí mosazná deska s reproduktorem připojeným přes audio jack a vodiče (uprostřed) a dvě domácí špachtle/stěrky s držákem na upevnění rozeznívané smyčcem (vpravo).

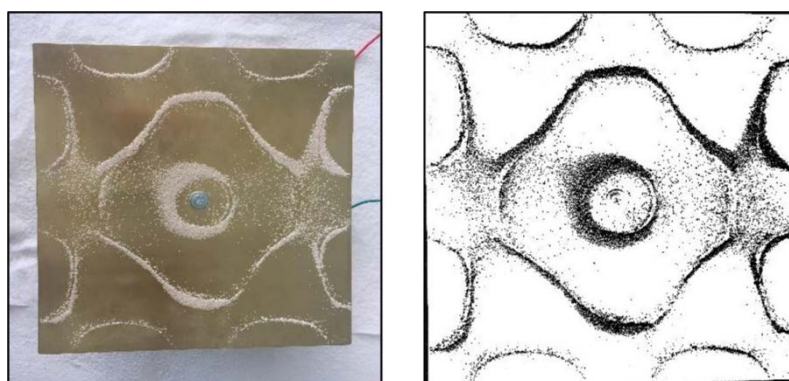
Před samotným měřením frekvencí jsme vždy nejprve vyvážíli desku pomocí vodováhy, aby byla vodorovná. V případě nerovností jsme papírem podložili reproduktor, ke kterému se následně připojil telefon. Na desku jsme nasypali pšeničnou krupici nebo kuchyňskou sůl. Pomocí nainstalované telefonní aplikace *Audio Function Generator* a její funkce „Frequency sweep“ jsme nejdříve proměřovali spektrum v intervalech frekvencí od 0–100 Hz, 100–200 Hz vzestupně až do hodnoty 1 000 Hz. Každý úsek se měřil po dobu 60 sekund (obr. 4). Při tomto měření jsme prováděli záznamy hodnot frekvencí, kdy se na povrchu desky rozpohybovala krupice nebo sůl a následně se vrátili k poznamenaným hodnotám a proměřovali užší intervaly frekvencí. Potom jsme provedli pozorování, při které frekvenci se obrazce tvoří nejlépe. Tímto způsobem jsme určili všechny výsledné naměřené hodnoty u obou aparatur.



Obr. 4. Aplikace *Audio Function Generator* s funkcí generování tónů o definované frekvenci (vlevo) a „Frequency sweep“ (vpravo).

Měření jsme nejprve prováděli s pšeničnou krupicí. Při praktickém měření a pozorování jsme ovšem zjistili, že její jemnější struktura zanechává prachové částice, které v některých případech rušili vzor obrazců. Při použití kuchyňské soli na černé desce byly obrazce patrnější.

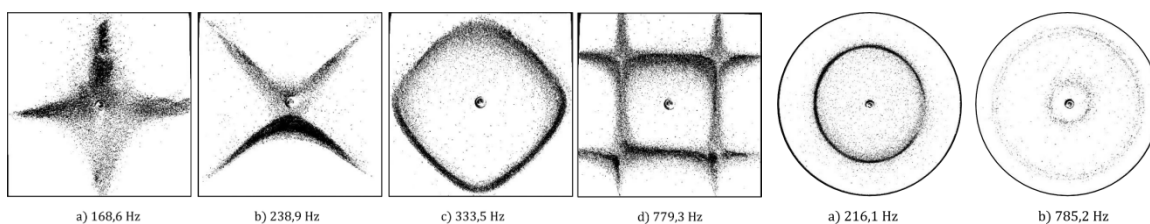
Vzniklé obrazce na deskách jsme dokumentovali pomocí telefonu. Získané snímky pak pomocí programu *Zoner Photo Studio X* upravili v počítači tak, aby uzlové čáry byly co nejzřetelnější. Toho jsme docílili snížením jasu, a naopak zvýšením kontrastu. Následným převedením fotografie na negativ a zobrazením pouze v odstínech šedé barvy. Pomocí opětovné úpravy jasu a kontrastu (popř. bílého a černého bodu), bylo dosaženo zvýšené viditelnosti obrazců. Oříznutím fotografie byly odstraněny nežádoucí plochy a zůstala tak zobrazena pouze deska s obrazcem. Příklad originální a upravené fotografie je uveden na obr. 5.



Obr. 5. Ukázka úpravy fotografií ke zvýraznění obrazců v programu Zoner Photo Studio X: originální fotografie (vlevo) a upravená fotografie obrazce (vpravo).

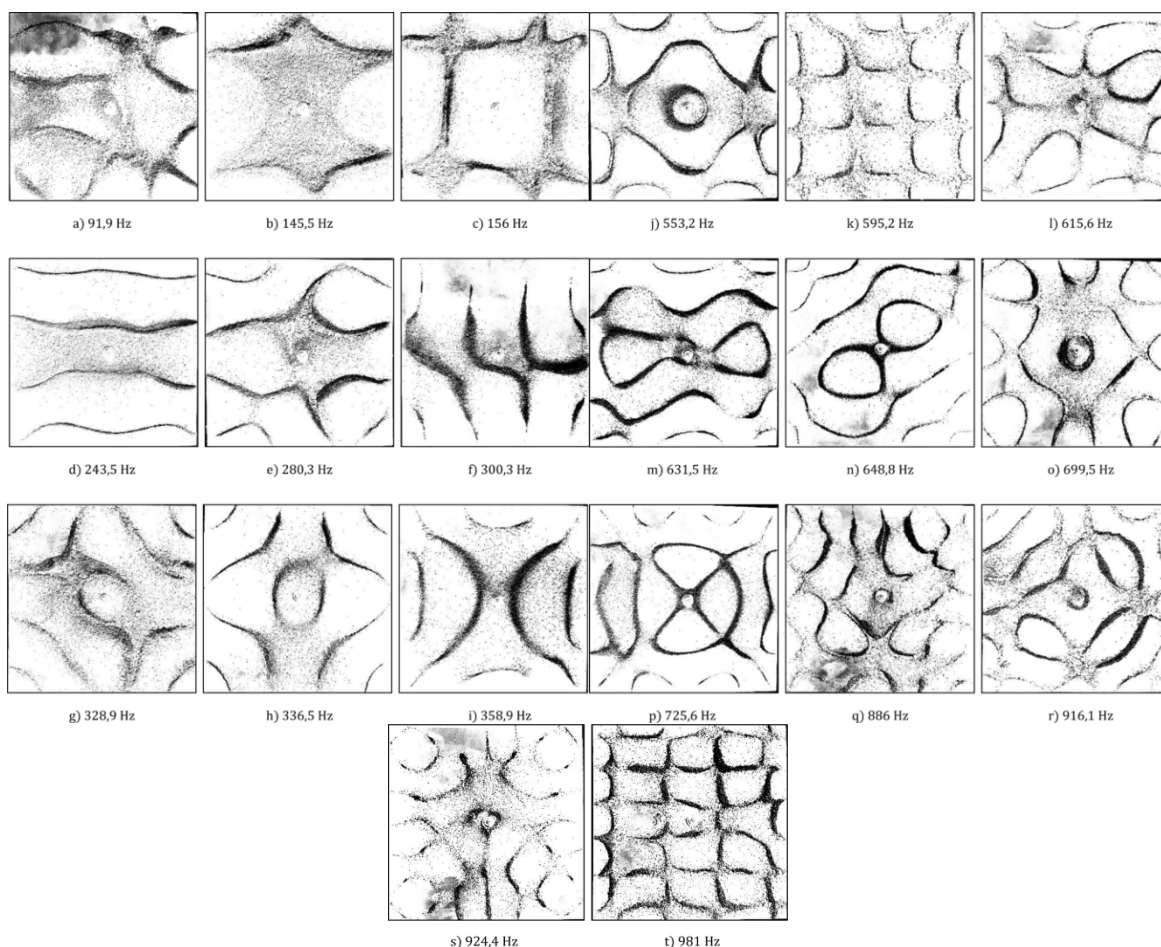
### **Získané obrazce**

Při měření s bezdrátovým reproduktorem a černou čtvercovou deskou, jsme naměřili pouze čtyři frekvence, při nichž obrazce vznikaly, v případě kruhové desky z demonstrační sady dokonce pouze dvě (obr. 6).



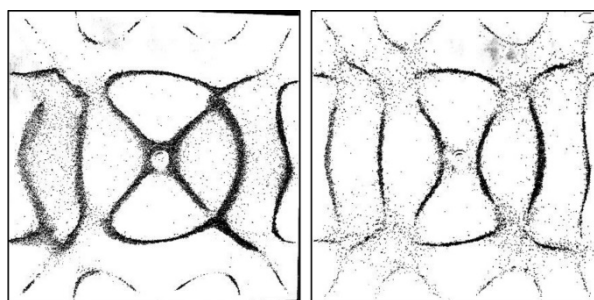
Obr. 6. Obrazce získané na čtvercové a kruhové desce ze soupravy Frederiksen Scientific.

Měření s mosaznou deskou bylo podstatně úspěšnější jak množstvím, tak složitostí získaných obrazců (obr. 7). Při této konstrukci byl polystyren umístěn na membráně reproduktoru blíže k jeho středu, docházelo zřejmě i k lepšímu přenosu vibrací na desku. Celkem jsme naměřili 20 hodnot vlastních frekvencí. Hodnoty naměřených frekvencí, při nichž vznikaly zřetelné obrazce, nepřesáhly hodnotu 1 000 Hz. Při hodnotách vyšších než 1 000 Hz se už neprojevovaly výrazné změny na povrchu desky.



Obr. 7. Obrazce získané na mosazné čtvercové desce s příslušnými frekvencemi.

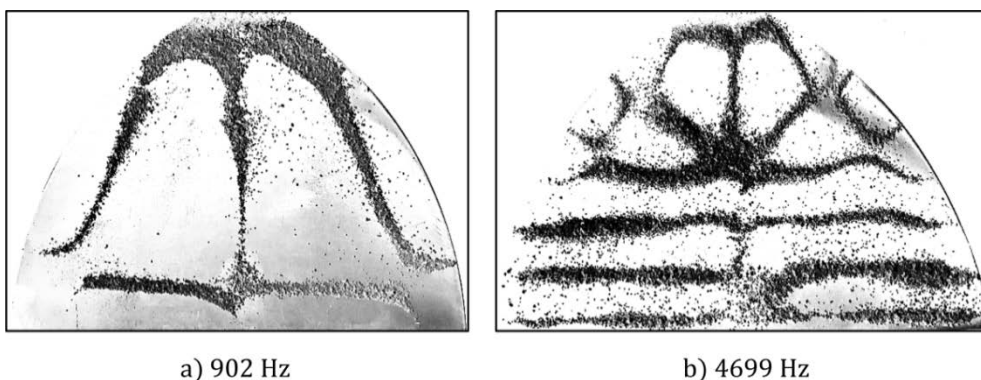
U jednoho z výsledných obrazců (frekvence 725,6 Hz) jsme vyzkoušeli k jednomu rohu desky připnout kancelářskou sponku a sledovat, do jaké míry se obrazec změní díky této asymetrii (obr. 8).



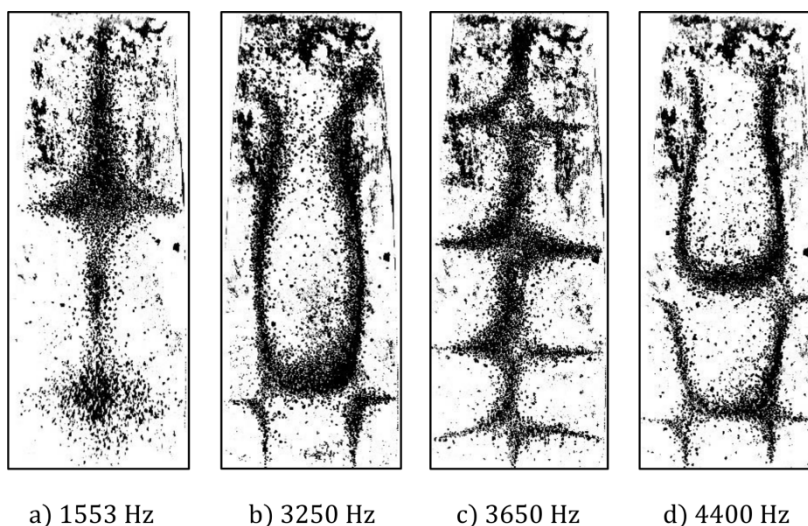
Obr. 8. Původní obrazec (vlevo) a obrazec získaný přidáním kancelářské sponky do pravého horního rohu (vpravo).

Poslední měření jsme provedli pomocí pomůcek zobrazených na obr. 3 vpravo, houslového smyčce a pšeničné krupice. Jednalo se o kovové špachtle běžně využívané v domácnosti například k sádrování. Pomocí šroubovacího držáku jsme špachtle uchytili na jedné straně k psacímu stolu. Z fyzikálního hlediska jde v tomto případě o experimenty s deskami uchycenými na jedné straně, a ne podepřenými v jejich středu jako v předchozím případě. Pro určení vlastní frekvence jsme nejprve „zahráli“ smyčcem na

špachtli. Frekvence tónů byla nižší u volného okraje, přibližováním smyčky k upevněnému okraji jsme mohli slyšet vyšší frekvence. Při opakování tahů na stejném místě jsme zřetelně slyšeli danou frekvenci, při níž vznikl obrazec. Vlastním sluchem jsme odhadli vlastní sluchem frekvenci tak, že pomocí aplikace v telefonu jsme volili hodnoty blízké vlastní frekvenci. V tomto okamžiku byly slyšet záněje. Dále jsme se tedy přibližovali k vlastní frekvenci, dokud záněje slyšet nebyly. Na větší špachtli se nám podařilo zachytit dva obrazce (obr. 9) na menší 4 (obr. 10), špachtle jsou uchyceny vždy v horní části obrázku. Podobně jako při přidání kancelářské sponky vidíme, že znečištění menší špachtle v horní polovině způsobilo, že jsou obrazce v této části v horší kvalitě („rozostřené“). Na obrázcích špachtlí můžeme vidět, že na volných okrajích převažují kmitny a v místě upevnění uzly. Lze také pozorovat, že na rozdíl od desek upevněných uprostřed je rozložení obrazců zřetelně v jednom směru asymetrické.



Obr. 9. Obrazce na větší špachtli.



Obr. 10. Obrazce na menší špachtli (díky zbytkům materiálu jsou obrazce v horní části zřetelně nesymetrické).

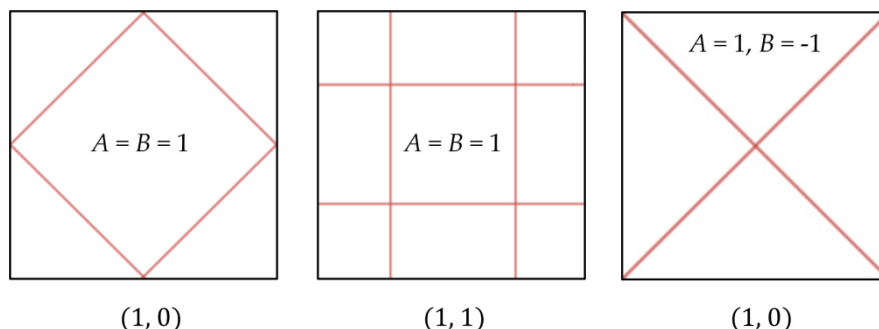
### **Zjednodušený teoretický model**

Teoretický popis stojatých vln na deskách či membránách zahrnující řešení vlnové rovnice s disperzí, volbu počátečních i okrajových podmínek popř. vhodné aproximativní metody (jako Ritzova, Rayleighova) přesahuje rámec středoškolské fyziky i základního vysokoškolského kurzu fyziky, základní informace lze získat např. v [6], [7] nebo [8].

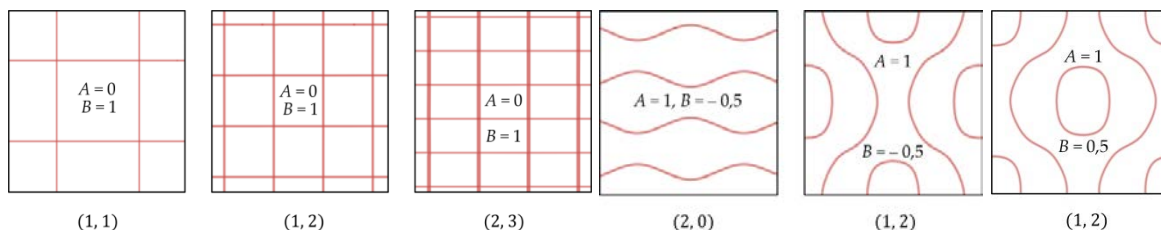
Naproti tomu rovnici uzlových čar čtvercové desky s volnými okraji upevněné uprostřed lze vyjádřit poměrně jednoduchým vztahem (viz např. [9])

$$A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + B \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) = 0, \quad (1)$$

kde  $m$  a  $n$  jsou tzv. módová čísla. Řešení rovnice (1) můžeme vykreslit pomocí vhodného software nebo modelu [www.desmos.com/calculator/flki7fzjwp](http://www.desmos.com/calculator/flki7fzjwp) využívajícího online kalkulačtor Desmos podobný multiplatformnímu dynamickému prostředí GeoGebra. Volitelnými parametry jsou jednak amplitudy  $A$  a  $B$  a jednak módová čísla  $m$  a  $n$ . U jednodušších obrazců lze určit módová čísla odpovídající experimentálně získaným obrazcům (obr. 4 a 5) i některým originálním Chladniho obrazcům (obr. 1).



Obr. 11. Módová čísla (v závorce) a amplitudy odpovídající obrazcům na silnější ocelové čtvercové desce ze soupravy Frederiksen Scientific.



Obr. 12. Módová čísla (v závorce) a amplitudy odpovídající obrazcům na tenčí mosazné čtvercové desce.

## Závěr

Pro experimentální měření jsme sestrojili dvě aparatury se dvěma čtvercovými deskami různých rozměrů. Na menší černé čtvercové desce jsme naměřili pouze čtyři vlastní frekvence, při nichž vznikaly výraznější obrazce. Při měření s černou deskou jsme nejprve pro zobrazování používali pšeničnou krupici, která vytvářela nežádoucí prachové částice narušující vzhled obrazců. Na základě získaných poznatků a podle návodu v [5] jsme zkonstruovali druhou aparaturu s rozměrově větší a tenčí mosaznou deskou. Pro znázornění uzlových čar jsme použili kuchyňskou sůl, vytvořené Chladniho obrazce byly patrnější. Na mosazné desce se podařilo nalézt podstatně více vlastních frekvencí a jim odpovídajících Chladniho obrazců. Pomocí této rovnice a on-line kalkulačtoru Desmos bylo možné určit módová čísla  $m$  a  $n$  některých experimentálně získaných obrazců a ukázat, že průběh uzlových čar lze v některých případech popsat pomocí poměrně jednoduché goniometrické rovnice (1), kterou je ale nutné řešit numericky.

Nakonec jsme vyzkoušeli měření v domácím prostředí pomocí škrabky/stěrky a houslového smyčce. Takové experimenty s běžnými pomůckami podtrhují souvislost fyzikální látky a pojmů s jevy a předměty každodenního života; i pomocí nich žáci mohou získat představu, jak „vypadá“ kmitání na desce. Podrobnější popis lze nalézt přímo v bakalářské práci [10].

## Literatura

- [1] Wikipedia contributors. *Ernst Chladni. Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [cit. 28. 7. 2020]. Dostupné online: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Chladni](https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni).
- [2] Chladni, E. F. F.: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges (Objevy v teorii zvuku)*. Weidmanns Erben und Reich, Leipzig 1787. [cit. 4. 9. 2020]. Obrázky dostupné online: [publicdomainreview.org/collection/chladni-figures-1787](http://publicdomainreview.org/collection/chladni-figures-1787).
- [3] Deutschen Museums, München a Digiporta, Digitales porträtarchiv. [cit. 4. 9. 2020]. Dostupné online: [www.digiporta.net/index.php?id=221253510](http://www.digiporta.net/index.php?id=221253510).
- [4] Science and the Stradivarius – Physics World. [cit. 24. 8. 2020]. Dostupné online: [physicsworld.com/a/science-and-the-stradivarius/](http://physicsworld.com/a/science-and-the-stradivarius/).
- [5] Williams A. *Chladni Plates: Speaker Version*. [cit. 1. 9. 2020]. Dostupné online: [www.spsnational.org/programs/outreach/chladni-plates-speaker](http://www.spsnational.org/programs/outreach/chladni-plates-speaker).
- [6] Bajer, J.: *Mechanika 3*. PŘF UP Olomouc 2006.
- [7] Fletcher, N. H., Rossing, T. D.: *The Physics of Musical Instruments*. New York: Springer, 2010.
- [8] Staňová, K.: *Fyzika Chladniho obrazců*. Bakalářská práce, Bakalářská práce Masarykova univerzita, Brno 2006. [cit. 2. 8. 2020]. Dostupné online: [is.muni.cz/th/jilOf/Fyzika\\_Chladniho\\_obrazcu](http://is.muni.cz/th/jilOf/Fyzika_Chladniho_obrazcu).
- [9] Potoček, V.: *Matematické modelování Chladniho obrazců na počítači*. Rozhledy matematicko-fyzikální, 82 (2), p. 16–25. [cit. 20. 8. 2020]. Dostupné online: [dml.cz/handle/10338.dmlcz/146193](http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/146193).
- [10] Kutnarová, A.: *Vlastní frekvenční módy Chladniho obrazců*. Bakalářská práce, UP, Olomouc 2020. [cit. 4. 9. 2020]. Dostupné online: [muj.optol.cz/richterek/doku.php?id=vyuka](http://muj.optol.cz/richterek/doku.php?id=vyuka).