

Jak vážit pomocí ampérmetru a voltmetru aneb vyrobte si (skoro) Kibblovy váhy

Leoš Dvořák

Katedra didaktiky fyziky MFF UK

Abstrakt

Kilogram je od roku 2019 definován nově. Pro jeho praktickou realizaci, resp. přesné měření hmotnosti se používají tzv. Kibblovy váhy. Příspěvek popisuje, jak si lze zhotovit jednoduchou levnou pomůcku, která umožní demonstrovat základní princip tohoto přístroje.

Motivace: jak se dnes váží kilogram

S platností od 20. května 2019 jsou v soustavě SI nově definovány základní jednotky. Kilogram je nyní definován pomocí Planckovy konstanty. Novou definici zde nebudeme uvádět ani blíže komentovat. (Přesné znění viz např. v [1], znění i s komentáři lze najít i na Wikipedii [2], [3].) Zaměříme se na to, jak lze kilogram realizovat, resp. změřit, tedy spíše zvažít.

Starší definice kilogramu byla názorná a pochopitelná, a to i na úrovni základní školy. Když si představíme, co si z ní může pamatovat laik, bude to něco ve stylu: „Kilogram je prostě to, co je zavřené někde v Sèvres u Paříže.“

Novou definici si laik nejspíš vůbec nepředstaví, možná si ze všech výkladů vezme jen něco jako „Kilo je pořád kilo, jak ho znám, jen to teď ti vědci dělají hrozně složitě přes nějaké konstanty.“

Možná je tohle maximum, čeho u laiků můžeme dosáhnout. ☺ Na druhou stranu bychom přece jen ve výuce fyziky asi neměli resignovat na možnost dát žákům alespoň nějakou představu, jak lze jednotku kilogram podle nové definice realizovat. To znamená, že bychom v tom měli mít alespoň trochu jasno my, fyzikáři.

Uvažovaných možností, jak realizovat kilogram, je víc, viz např. příspěvek M. Rottera [4]. Nejčastěji se uvádějí *Kibblovy váhy*, určující sílu na základě měření napětí a proudu. Tato měření dnes mohou být až neuvěřitelně přesná. Například v článcích [5], [6], si můžeme přečíst, že napětí a proud lze měřit pomocí kvantových efektů, konkrétně tzv. Josephsonova efektu a kvantového Hallova jevu. Ty umožňují realizovat normály napětí a odporu, jejichž nejistoty jsou jen řádu 10^{-9} . Z napětí a odporu pak dostaneme i velmi přesnou hodnotu proudu. Ve vztazích pro hodnoty daných normálů se objevuje Planckova konstanta h a hodnota elementárního náboje e . V součinu $U \cdot I$ přitom zbyde jen h , tedy konstanta, přes kterou je definován kilogram.

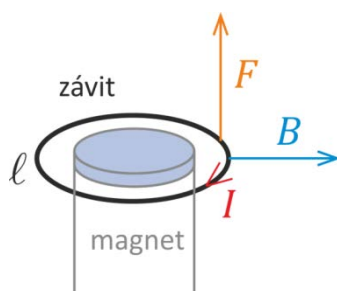
Tyto kvantové záležitosti zde ovšem blíže rozebírat nebudeme, ostatně jsou několik pater nad středoškolskou fyzikou. Podstatné je, že pokud umíme dostatečně přesně měřit hmotnost pomocí napětí a proudu, máme toto měření navázáno na Planckovu konstantu – a tedy na novou definici kilogramu.

Princip daného měření navrhl v roce 1975 Bryan Kibble, podle něhož se dnes tyto váhy nazývají. (Lze se setkat i s dříve používaným názvem „wattové váhy“, anglicky *watt balance*). Cílem tohoto příspěvku je ukázat na jednoduché pomůcce, jak toto zařízení funguje a jak se pomocí něj měří.

Kibblovy váhy měří sílu

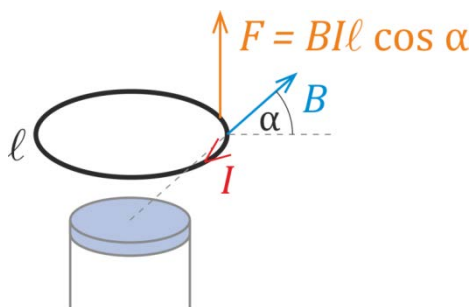
Hned na počátku zdůrazněme, že Kibblovy váhy měří *sílu* – při měření závaží tedy tíhovou sílu mg . Pro určení hmotnosti m tedy potřebujeme znát hodnotu tíhového zrychlení; ta se při profesionálních měřeních stanovuje přesnými gravimetry.

Tíha závaží se vyvažuje silou, kterou působí magnetické pole na vodič s proudem. Situaci pro jeden závit s proudem ukazuje obr. 1.



Obr. 1. Síla působící na závit v magnetickém poli.

Pokud je magnetická indukce \vec{B} kolmá na proud a má ve všech bodech závitu stejnou velikost, je velikost síly daná známým vzorcem $F = B I \ell$, kde I je proud a ℓ je délka závitu. Pokud by magnetická indukce v jednotlivých bodech závitu svírala s rovinou závitu úhel α , bude ve vztahu pro sílu ještě $\cos \alpha$, viz obr. 2.



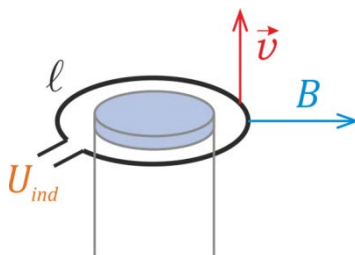
Obr. 2. Síla působící na závit když magnetická indukce není v rovině závitu.

Sílu můžeme vypočítat i v obecnějším případě, ovšem příslušný výpočet už spadá spíše do vysokoškolské fyziky.

Podstatné ale je, že zatímco proud můžeme měřit velmi přesně (alespoň to velmi přesně umí fyzikové při využití zmíněných kvantových jevů), měření délky závitu a velikosti a směru magnetické indukce už zdaleka není tak přesné. (Reálně se k měření používá ne jeden závit, ale cívka, a pro přesné měření bychom museli velmi detailně znát geometrii celého uspořádání a rozložení magnetického pole.) Takže ani sílu bychom dost přesně měřit neuměli – nebyť vskutku skvělého Kibblova nápadu.

Kibblova myšlenka

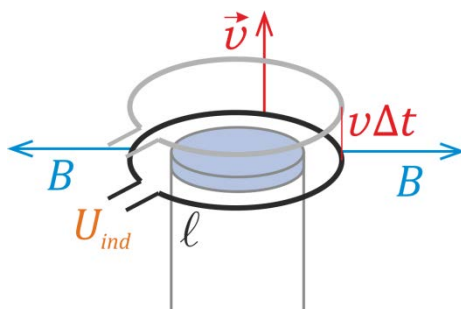
Základní myšlenka B. Kibbla byla nechat stejné magnetické pole, a závitem (resp. cívkou) hýbat nahoru a dolů, jak to ukazuje obr. 3. A měřit přitom indukované napětí.



Obr. 3. Při pohybu závitem (ve stejném magnetickém poli) měříme indukované napětí.

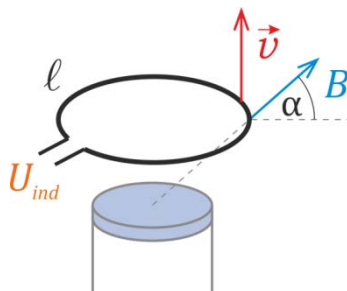
Velikost indukovaného napětí je $U = v B l$. Poznamenejme, že ve středoškolské fyzice se tento vztah odvozuje pro přímý vodič pohybující se v homogenním magnetickém poli. V případě našeho závitu můžeme závit rozdělit na malé kousky, každý z nich brát jako dostatečně rovný, napětí na kousku vzít $\Delta U = v B \Delta l$ a sečíst přes všechny kousky, takže opravdu vyjde $v B l$.

Alternativně lze tento vztah vyvodit ze zákona elektromagnetické indukce: Za malý čas Δt se závit ve svislém směru posune o $v \Delta t$, viz obr. 4. Pláštěm myšleného válečku, jehož podstavy tvoří závit v čase t a $t + \Delta t$, teče magnetický indukční tok $\Delta \Psi = B \Delta S = B v \Delta t l$. O $\Delta \Psi$ se zmenší magnetický indukční tok tekoucí závitem. Pak již stačí vzít $\Delta \Psi / \Delta t$.



Obr. 4. K odvození indukovaného napětí ze zákona elektromagnetické indukce.

Pokud není magnetická indukce rovnoběžná s rovinou závitu, uplatní se ve vztahu pro napětí jen složka $B \cos \alpha$, viz obr. 5.



Obr. 5. Indukované napětí pro závit v obecnější poloze je $U = v B l \cos \alpha$.

Proč je Kibblova myšlenka skvělá

Síla působící na závit v situaci dle obr. 2 je

$$F = I B \ell \cos \alpha . \quad (1)$$

Napětí, indukované v pohybujícím se závitě v situaci dle obr. 5 je

$$U = v B \ell \cos \alpha . \quad (2)$$

Vydělením vztahů (1) a (2) dostaneme

$$\frac{F}{U} = \frac{I}{v} \Rightarrow F = \frac{U I}{v} . \quad (3)$$

To znamená, že pro výpočet síly *nepotřebujeme znát* ani velikost magnetické indukce, ani délku závitě, ani směr, který magnetická indukce svírá s rovinou závitě!

Prostě nejdříve závitěm hýbeme známou rychlostí v a měříme napětí U , které se v něm indukuje. Pak na závit zavěsíme závaží, které chceme měřit a nastavíme proud I , aby síla F , kterou magnetické pole působí na závit, vyvažovala tíhu závaží. Ze vztahu (3) pak dostaneme tíhu závaží. Celá konstrukce bývá opravdu realizována jako váhy s vahadlem, podobně jako to známe ze starých laboratorních vah. Místo jednoho závitě je ovšem použita cívka o mnoha závitěch.

Celé odvození lze provést i obecněji a ukáže se, že výsledek nezávisí ani na geometrii daného uspořádání. Například pól magnetu nemusí být na ose cívky, takže velikost magnetické indukce bude různá v různých bodech závitě – i v tomto případě bude platit výsledek (3).

Poznamenejme, že vztah (3) lze upravit na $F v = U I$. Výrazy na obou stranách mají rozměr výkonu – to je zjevně důvod, proč se dřív dané zařízení označovalo jako „wattové váhy“. Vlastně je to označení nepřesné, protože síla a rychlost se měří v různých fázích experimentu, podobně je tomu pro proud a napětí. Dodejme, že o přejmenování na Kibblovy váhy rozhodla konzultační komise Mezinárodního úřadu pro míry a váhy dva měsíce po smrti B. Kibbla v roce 2016.

Demonstrace principu Kibblových vah: výsledky profesionálů a naše ambice

Profesionální Kibblovy váhy (viz například obrázky a fotografie v příspěvku [4] nebo na Wikipedii [7]) dnes dosahují přesnost až řádu 10^{-8} , a jsou samozřejmě nesmírně drahé. Fyzikové z amerického National Institute of Standards and Technology (NIST) a University of Maryland postavili již před šesti lety demonstrační verzi Kibblových vah. V článku [6] ji popisují jako konstrukci z LEGa, nicméně v ní využívají i výrazně sofistikovanější technologie. Pomocí „senzoru stínu“ určují polohu cívky s přesností na $50 \mu\text{m}$; jejich cívka má 3 tisíce závitů. Pohyb vahadla budí proudem do cívky na druhém rameni, opět v poli permanentního magnetu. Celkově dosáhli přesnosti lepší než asi 1 %.

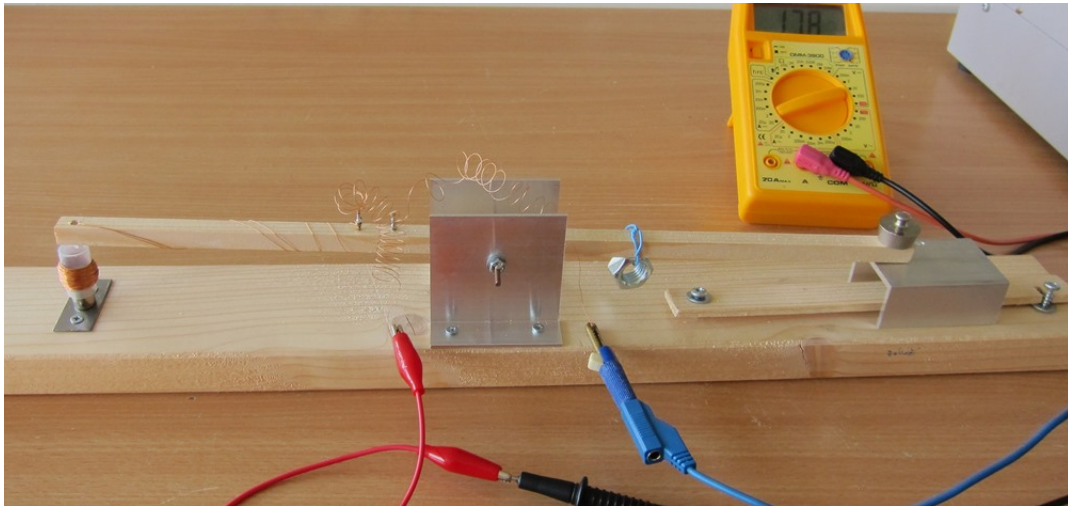
A jaké mohou být ambice českého fyzikáře?

- Udělat pomůcku levnou, „z latěk a dostupných materiálů“.
- A co do přesnosti: „Kéž by to vyšlo alespoň řádově...“ (Řekněme na 20 až 30 %.)

„Kibblovy váhy českého fyzikáře“ – první pokusy

První teoretické odhady vycházející ze vztahů (1) a (2) ukázaly, že při použití neodymových magnetů a cívky o několika stovkách závitů by princip Kibblových vah bylo možno demonstrovat. Také z prvních pokusů, kdy se magnetem v cívce hýbalo rukou, vyšla řádová shoda poměrů F/U a I/v ve vztahu (3).

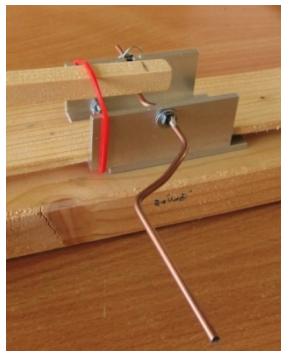
První konstrukce „Kibblových vah českého fyzikáře“ měla skutečně vahadlo z dřevěné laťky. Cívka byla navinuta na uříznuté plastové stříkačce, měla 200 závitů vinutých poměrně dívoce přes sebe. (V radioamatérské praxi se takovým cívám skutečně říká „vinuté nadivoko“.) Cívka byla k lačce připevněna tak, že trn plastové stříkačky se zasunul do díry vyvrtané v lačce. Vahadlo bylo vyváženo maticí přivázanou zvonkovým drátem. Neodymový magnet o průměru 1 cm a délce 2 cm se vlastní magnetickou silou držel na ocelovém plíšku přišroubovaném k základní destičce vah. Závažíčko bylo prostě položeno na druhém rameni vah. Celou konstrukci ukazuje obr. 6.



Obr. 6. První konstrukce demonstrační pomůcky.

Při vyvažování závažíčka byla cívka napájena laboratorním zdrojem, proud byl měřen multimetrem. Pro závaží 20 g byly váhy vyváženy při proudu 180 mA. Síla $F = mg$ byla tedy asi 0,196 N, poměr $F/I \doteq 1,09$.

Pohyb cívky v druhé části pokusu byl u této konstrukce realizován otáčející se „vačkou“ ze zahnutého drátu, otáčela se rukou pomocí klíčky, viz obr. 7.

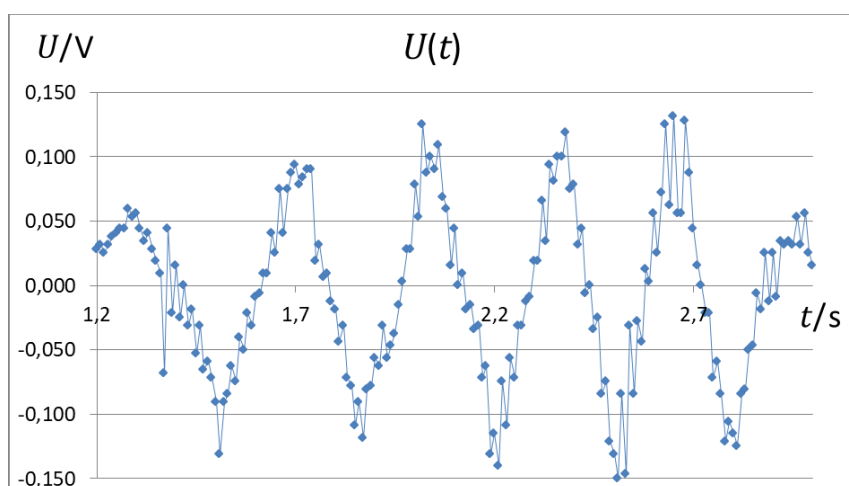


Obr. 7. „Vačka“ z drátu při otáčení kmitá vahadlem nahoru a dolů.

Napětí indukované v cívce bylo snímáno LabQuestem2 se senzorem na 6 V, hodnoty pak byly vyexportovány do Excelu. Z průběhu napětí šlo určit periodu kmitů T a amplitudu napětí U . Za předpokladu, že průběh kmitů je harmonický (tedy „sinusový“) lze pak z amplitudy A kmitů cívky a úhlové frekvence $\omega = 2\pi/T$ určit maximální rychlost cívky jako $v = A \omega$. Amplituda kmitů je přitom dána „excentricností vačky; v našem případě byla asi 0,5 cm.

Perioda kmitů byla v konkrétním případě ze záznamu napětí určena na asi 0,32 s, po dosažení vycházela maximální rychlost asi 0,1 m/s.

Záznam napětí v závislosti na čase ukazuje, že průběh napětí bohužel není příliš harmonický, viz obr. 8.



Obr. 8. Průběh záznamu napětí v první verzi pomůcky.

Zjevně tedy nelze očekávat od této verze pomůcky příliš. Nicméně když odhadneme maximální hodnoty napětí asi na 0,14 V, vychází poměr $U/v \doteq 1,4$.

Ze vztahu (3) vychází, že teoreticky by mělo být $\frac{F}{I} = \frac{U}{v}$. V našem případě jsou poměry 1,09 a 1,4, liší se tedy asi o 30 %. Fakticky tedy už tato jednoduchá verze pomůcky splňuje výše vytyčené ambice. Ovšem zejména záznam průběhu napětí na obr. 8 ukazuje, že by bylo záhodno konstrukci vylepšit.

Problematická místa první verze naší pomůcky jsou po chvíli úvah celkem zřejmá:

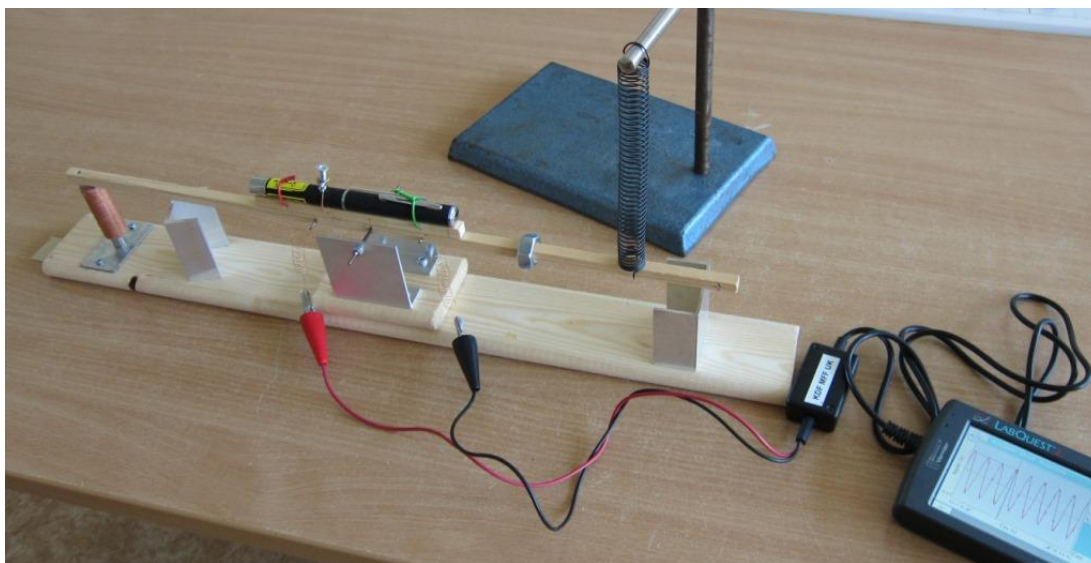
- V cívce vinuté „nadivoko“ indukované napětí závisí, kromě rychlosti pohybu, výrazně i na poloze magnetu vůči cívce. (Napětí tedy nemusí být maximální, když je rychlost maximální.)
- Při ručním otáčení klikou není rychlost otáčení rovnoměrná, kmity vahadla proto zřejmě nejsou harmonické. (K „zubatému“ průběhu napětí na obr. 8 navíc asi může přispívat nerovný povrch laťky v místech, kde po ní klouže „vačka“.)
- Dostí nepřesné je zřejmě určení amplitudy kmitů. Při amplitudě 0,5 cm (měřené navíc běžným pravítkem, maličko „od oka“) znamená odchylka o 1 mm relativní chybu 20 %.

Uvedené zdroje nepřesností se pokusila zmírnit druhá verze modelu Kibblovyh vah.

Druhá verze vah

V druhé (a zatím poslední) verzi modelu Kibblových vah je:

- Lepší cívka. Opět je vinuta na kusu plastové stříkačky, ale tentokrát pečlivě, závit vedle závitu (smaltovaným drátem o průměru 0,224 mm), ve dvou vrstvách, celkem 330 závitů. Délka cívky je 5 cm. V rovnovážné poloze je pól magnetu uprostřed cívky. (Magnet je neodymový, průměru 1 cm, délky 4 cm, složený ze dvou magnetů délky 2 cm.)
- Ve fázi pokusu, kdy se cívka pohybuje, vahadlo kmitá díky pružině. (Byla použita pružina délky 15 cm, průměru 1,5 cm, z nějaké starší školní sady. Tuhost použité pružiny byla asi 50 N/m, na přesné hodnotě nezáleží.)
- Amplituda kmitů byla určována pomocí laseru připevněného na rameno vahadla, viz obr. 9. Laserová stopa dopadala na stupnici, při konkrétním měření byla stupnice vzdálena 280 cm. Maximální výchylku stopy bylo možno určit již při pozorování pouhým okem (na to se hodí mít pomocníky); při konkrétním měření (na které byl autor sám) byl pohyb stopy natáčen fotoaparátem s rychloběžným videem (210 snímků/s), amplituda byla poté odečtena v programu Tracker.
- Navíc měřené závaží nebylo na vahadlo jen pokládáno, ale bylo zavěšeno na niti. Tím se zpřesnilo určení vzdálenosti závaží od osy otáčení.



Obr. 9. Provedení druhé verze modelu Kibblových vah – fáze měření s pohybem cívky.

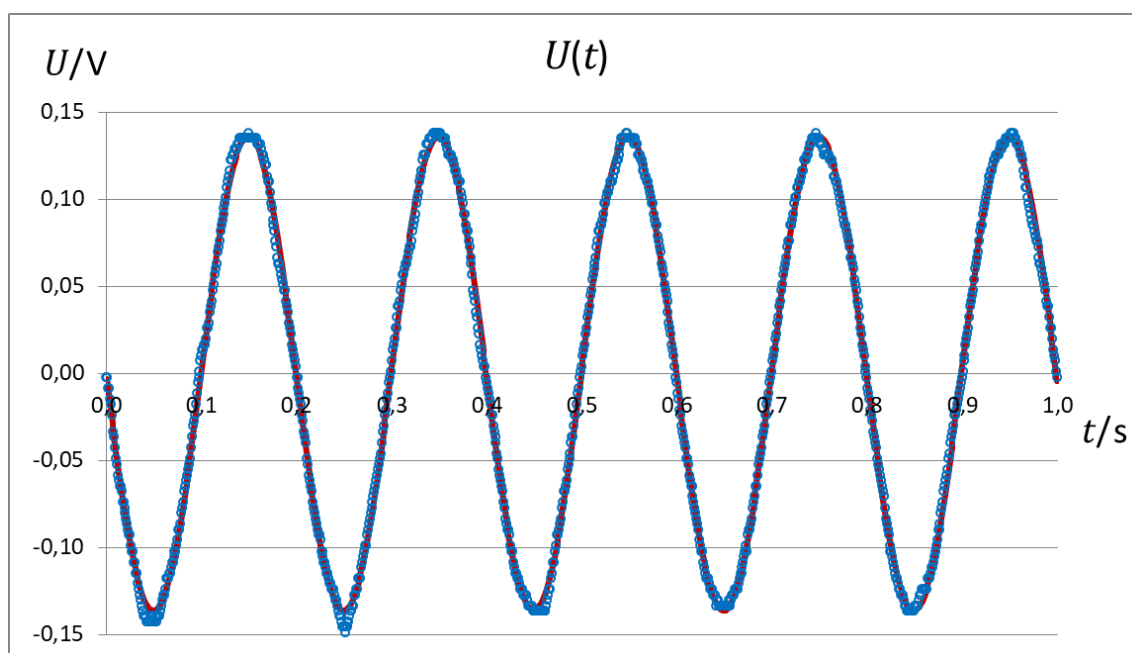
Měření na druhé verzi vah

Při měření síly bylo závažíčko 10 g vyváženo při proudu 163 mA. Rozvážení bylo jasně patrné již při změně proudu o 1 až 2 mA. Poměr síly a proudu vychází $F/I \doteq 0,602 \text{ N/A}$.

Při měření napětí indukovaného na pohybující se cívce byla perioda kmitů asi 0,20 s. (Určení kmitočtu z frekvenčního spektra kmitů dalo $f \doteq 5,005 \text{ Hz}$. Že to vyšlo zrovna takhle, je samozřejmě náhoda, frekvence závisí na tom, v jaké vzdálenosti od osy pružinu

k vahadlu připevníme.) Kmity mají poměrně malé tlumení: za 20 s jejich amplituda klesla asi na jednu polovinu. Jak ukazuje obr. 10, kmitání již lze „s rozumnou přesností“ brát jako harmonické, alespoň při subjektivním posouzení grafu.

Poznámka: V grafu jsou modře zobrazeny naměřené hodnoty, červená křivka za nimi je proložená harmonická závislost, přesněji řečeno sinusovka s exponenciálně klesající amplitudou. Parametry proložené křivky lze nastavovat zkusmo „ručně“, nebo v Excelu využít Řešitele. Tak můžeme zjistit přesnější hodnotu amplitudy, pro přibližné určení ji samozřejmě můžeme odečíst přímo z grafu.



Obr. 10. Napětí indukované na pohybující se cívce.

Při konkrétním měření byla amplituda kmitů cívky 7,0 mm, z toho vyplývá maximální rychlost asi 0,22 m/s. Amplituda napětí zjištěná pomocí Řešitele vycházela 0,136 V; z grafu bychom ji patrně odečetli jako 0,14 V. Poměr napětí a rychlosti odtud vychází $U/v \doteq 0,618 \text{ V}/(\text{m/s})$.

Porovnáním vidíme, že U/v a F/I se liší jen asi o 2,7 %. (Kdybychom použili méně přesnou hodnotu amplitudy napětí odečtenou přímo z grafu, byla by odchylka necelých 6 %.)

Hodnoty U/v můžeme počítat i z dalších oblastí grafu $U(t)$. V konkrétním měření se například hodnoty U/v zjištěné v čase okolo 5 s lišily od F/I asi o 3,9 %, pro hodnoty zjištěné v čase okolo 12 s byla odchylka asi 1,7 %.

Z daných měření můžeme předběžně uzavřít, že s naším modelem Kibblovy vah **dosahujeme přesnosti asi 2 až 4 %**, obecně tedy jednotky procent. Na skutečné přesné vážení to samozřejmě nestačí, ale při demonstraci principu realizace kilogramu pomocí Kibblovy vah se daná konstrukce může uplatnit.

Možná další vylepšení?

Přesnost našeho modelu Kibblových vah by snad bylo možno ještě trochu zvýšit. (Ostatně skutečnost, že v dosavadních měřeních vycházel poměr U/v ku F/I vždy o něco větší než 1, ukazuje na to, že se zde vyskytuje nějaká zatím neznámá systematická chyba.)

Jedním zdrojem nepřesností může být měření senzorem Diferenciální voltmetr (DVP-BTA) připojeným k Labquestu. Napětí s amplitudou 0,1 až 0,15 V, která se na cívce indukují, jsou pro tento senzor dost malá. (V návodu se uvádí, že daný senzor má citlivost asi 3 mV a šum až 18 mV.) Pokud nechceme vinout cívku s mnohem větším počtem závitů, nabízí se možnost postavit zesilovač napětí se zesílením dejme tomu 10 (šlo by až 40, protože daný senzor má rozsah do 6 V), s použitím operačního zesilovače půjde o poměrně jednoduchou konstrukci.

Při zpřesňování měření by bylo vhodné zkontrolovat i to, jak přesně měří multimetr měřící proud. (Návod k použitému typu multimetru uvádí přesnost měření proudu $\pm 1,2\%$.)

Pozornost také určitě bude třeba věnovat měření amplitudy výchylky, pro zpřesňování toto může být kritické. Při dalším zpřesňování by zřejmě již bylo nutno nemít cívku pevně spojenou s ramenem, ale zavěsit ji na nějaký břitový závěs... ale tím už by se konstrukce začala komplikovat.

Závěr: K čemu to je a může být dobré

Na otázku „k čemu je to dobré“ lze dát více odpovědí.

Jednak nám popsaná pomůcka snad může přiblížit, jak se dnes „váží kilogram“ a Kibblovy váhy pro nás už pak nebudou něčím zcela podivným a záhadným.

Za druhé může jít o námět na projekty pro žáky a studenty. Takový projekt lze realizovat jak v jednoduché variantě, kdy by nám opravdu stačila přesnost řádu třicet i více procent, tak v náročnějších verzích až po velmi sofistikované konstrukce, výrazně převyšující model vah popsaný v tomto příspěvku.

A konečně se při výrobě dané pomůcky a jejím zdokonalování a měření s ní lze spoustu věcí přiučit. Z vlastní zkušenosti mohu uvést třeba:

- Využití digitální techniky při sběru dat z měření.
- Využití počítačových programů a aplikací při zpracování výsledků měření (třeba použití Řešitele v Excelu).
- Trénování trpělivosti při vinutí cívek. (☺)
- Trénink kreativity při vymýšlení, jak zlepšit přesnost.
- A konečně i trénink a rozvíjení pokory, když po zásazích s cílem vylepšit měření člověk zjistí, že se výsledná přesnost zhoršila...

Těm z vás, pro něž je tento příspěvek inspirací postavit si, ať už sami nebo se svými žáky, podobný model umožňující vážit pomocí ampérmetru a voltmetru, přeji, ať si to maximálně užijete.

Literatura

- [1] Česká metrologická společnost, z.s.: *Nové definice základních jednotek SI*. Dostupné online: <https://spolky.csvts.cz/cms/content/nove-definice-zakladnich-jednotek-mezinarodni-soustavy-si>
- [2] Wikipedia: *Nové definice SI*. Dostupné online: https://cs.wikipedia.org/wiki/Nov%C3%A9_definice_SI
- [3] Wikipedia: *2019 redefinition of the SI base units*. Dostupné online: https://en.wikipedia.org/wiki/2019_redefinition_of_the_SI_base_units
- [4] Rotter M.: *Redefinice fyzikálních jednotek SI*. (Příspěvek v tomto sborníku.)
- [5] Schlamminger S, Darine H.: *The Kibble balance and the kilogram*. Comptes Rendus Physique 20, No. 1-2, (Jan-Feb 2019), p. 55-63. Dostupné online: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070518301336?via%3Dihub>
- [6] Chao L. S. et. al.: A LEGO Watt balance: An apparatus to determine a mass based on the new SI. Amer. J. Phys. 83 (2015), p. 913-922
- [7] Wikipedia: *Kibble balance*. Dostupné online: https://en.wikipedia.org/wiki/Kibble_balance