Zase to těžiště

VOJTĚCH ŽÁK
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

V příspěvku jsou uvedeny čtyři náměty do výuky tématu těžiště, které jsou vhodné zejména pro střední školy, ale po zjednodušení i pro výuku fyziky na základních školách. Jedná se o analogii mezi polohou těžiště a průměrem známek, určování těžiště soustavy tvořené dvěma míčky a tyčkou, změna polohy těžiště činky a souvislost středu území s těžištěm jeho modelu. Náměty mají přesah do matematiky, geografie a sportu.

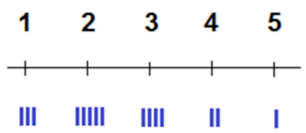
Úvod

Těžiště patří mezi klasická témata výuky fyziky jak na středních, tak na základních školách. Fakt, že se těší zájmu vzdělavatelů ve fyzice, můžeme doložit např. tím, že v *Souhrnném sborníku Veletrhu nápadů učitelů fyziky* [1] najdeme osmnáct příspěvků pod tímto klíčovým slovem. Kromě námětů do výuky fyziky, které jsou v těchto příspěvcích uvedeny, odkažme na článek [2], ve kterém je podrobně diskutován význam pojmu *těžiště*, ale také *střed hmotnosti* (resp. *hmotný střed*). V tomto příspěvku se držíme v praxi ustáleného označení těžiště, i když, jak bude zřejmé z následujícího, zejména při výpočtech polohy těžiště se opíráme o definici středu hmotnosti.

Náměty do výuky tématu těžiště

Poloha těžiště v analogii s průměrem známek ve škole

Výpočet polohy těžiště lze žákům přiblížit na základě analogie s výpočtem (váženého aritmetického) průměru známek. Schematicky je možný přístup znázorněn na obr. 1, kde počty čárek pod klasifikační stupnicí 1 až 5 znamenají počty příslušných známek.



známka …… souřadnice polohy x ……. KDE?

počet známek …… hmotnost m ……. KOLIK?

průměr známek =

$$= \frac{\mathbf{1}\cdot 3 + \mathbf{2}\cdot 5 + \mathbf{3}\cdot 4 + \mathbf{4}\cdot 2 + \mathbf{5}\cdot 1}{3+5+4+2+1} \approx$$

$$\approx 2{,}53$$

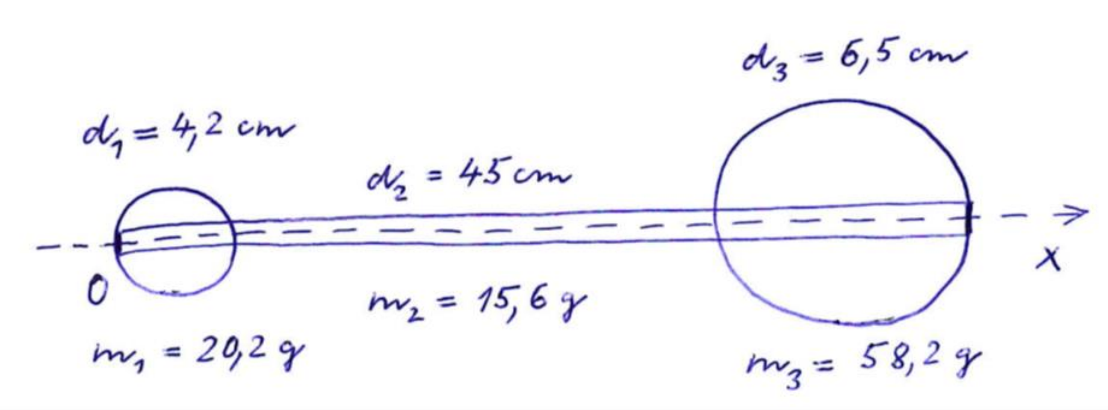
$$x_{\mathrm{T}} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Obr. 1 - Výpočet polohy těžiště v analogii s výpočtem průměru známek

Výsledný vztah (vpravo dole na obr. 1) je možné zobecnit pro libovolný konečný počet hmotných bodů (těles) a v této podobě je vhodný k řešení jednorozměrné úlohy (těžiště hledáme v rámci jedné přímky).

Míčky a tyčka – kde je těžiště?

Ze dvou různých míčků, např. tenisového, gumového, plastového, pěnového apod., a z dřevěné tyčky je možné vyrobit soustavu těles, která připomíná nesymetrickou činku (viz obr. 2). Do míčků jsou udělány otvory, např. vyvrtány. Úlohou pro žáky může být *zjistit polohu těžiště „činky“: a) experimentálně, b) na základě výpočtu (a měření délek a vážení).*



Obr. 2 - Náčrtek soustavy tvořené dřevěnou tyčkou a dvěma míčky

Experimentálně mohou žáci úlohu vyřešit např. pomocí nitě s očkem a zavěšování nebo pomocí „sjíždění prstů“ pod tyčkou.

Pokud budeme řešit úlohu na základě výpočtu, je potřeba zvážit oba míčky a tyčku a dále určit jejich rozměry (průměry míčků a délku tyčky). Vzhledem k tomu, že úloha je jednorozměrná, zvolili jsme pro přehlednost osu *x* v ose tyčky (a míčků) s počátkem na levém konci tyčky (označen *O* na obr. 2).

Využitím výše uvedeného vztahu pro polohu těžiště (a dosazením změřených hodnot, viz obr. 2), dostáváme, že

$$x_\mathrm{T} = \frac{\frac{d_1}{2}\cdot m_1 + \frac{d_2}{2}\cdot m_2 + \left(d_2 - \frac{d_3}{2}\right)\cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 30{,}0\ \text{cm}.$$

Zkušenost z výuky ukazuje, že jsou-li hmotnosti těles v řádu desítek gramů a jejich typické rozměry v řádu centimetrů až decimetrů, dochází k velmi dobré shodě mezi polohou těžiště zjištěnou na základě metod a) a b). Rozdíly bývají typicky v řádu jednotek milimetrů. Předpokladem je, že použitá tělesa jsou souměrná (se žáky můžeme diskutovat, co přesně to v tomto případě znamená). Přemýšlivějším žákům můžeme dát k zamyšlení další otázky, např.:

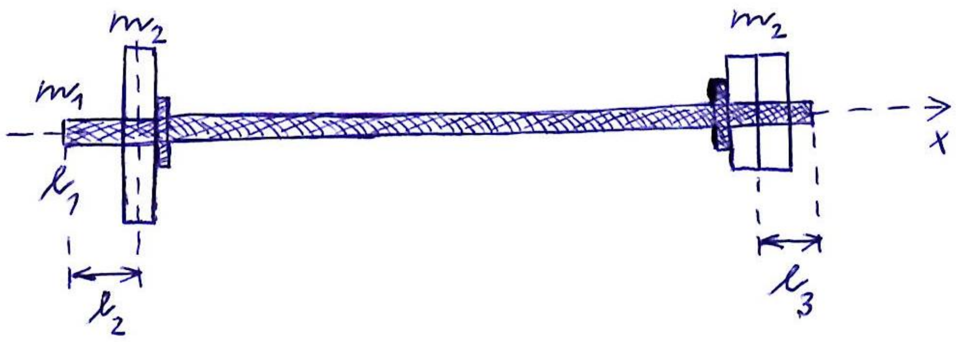
Kde všude může být na tyčce (mimo míčky) těžiště, když oba míčky na ní musí být zcela nasazeny (celým svým průměrem)?

Kolik rozmístění míčků existuje k jednotlivým polohám těžiště?

Jak se změní poloha těžiště činky?

Další úloha byla motivována cvičením v posilovně. Představme si, že člověk v posilovně chce použít činku, která bude mít na obou stranách po jednom 10kilogramovém kotouči.

Zjistí ale, že k dispozici je jen jeden 10kilogramový kotouč (ostatní jsou rozpůjčované) a dva 5kilogramové kotouče. Otázkou je, *jak se změní poloha těžiště této nesymetrické činky oproti situaci, kdy byly po stranách 10kilogramové kotouče (symetrická činka)?* Situace je znázorněna na obr. 3 (vyšrafovaná je symetrická tyč činky, jejíž parametry jsou označeny indexem 1).



Obr. 3 - Náčrtek nesymetrické činky

K početnímu řešení úlohy můžeme opět využít výše uvedený vztah pro polohu těžiště. Pokud budeme určovat změnu polohy těžiště jako rozdíl polohy těžiště „nové“, nesymetrické, činky a „původní“, symetrické, dostáváme (na základě obr. 3 a běžného označení), že

$$\Delta x_{\mathrm{T}} = x_2 - x_1 =$$

$$= \frac{\frac{l_1}{2}\cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 + (l_1 - l_3)\cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_2} - \frac{\frac{l_1}{2}\cdot m_1 + l_2 \cdot m_2 + (l_1 - l_2)\cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_2} =$$

$$= \frac{1}{m_1 + 2m_2} m_2[(l_1 - l_3) - (l_1 - l_2)] =$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{m_1}{m_2}}(l_2 - l_3).$$

Nad výsledným vztahem se můžeme zamyslet z hlediska speciálních, limitních, případů. Bude-li $m_1 \ll m_2$, tj. tyč je velmi lehká oproti hmotnosti kotoučů, dostáváme $\Delta x_{\mathrm{T}} \approx \frac{1}{2}(l_2 - l_3)$, což dobře odpovídá představě, že poloha těžiště je v tomto případě dána jen rozmístěním dvou stejně hmotných těles. Bude-li $m_1 \gg m_2$, tj. hmotnost kotoučů je zanedbatelná vůči hmotnosti tyče, dostáváme $\Delta x_{\mathrm{T}} \approx 0$, což odpovídá představě, že poloha těžiště se po přidání dvou velmi lehkých kotoučů nezmění.

Můžeme také provést konkrétní výpočet pro reálné hodnoty, např. $m_1 = m_2 = 10$ kg a šířka libovolného ze tří kotoučů je 3 cm (z čehož vyplývá, že $l_2 - l_3$ = 1,5 cm). Po jednoduchém výpočtu dostáváme $\Delta x_T = 0{,}5$ cm. V tomto případě je tedy zřejmé, že těžiště se posune jen málo.

Kde je střed území, např. Česka?

Poměrně známou aktivitou ve výuce fyziky je hledání středu území na základě polohy těžiště jeho modelu (viz např. fyzikální olympiáda, 1. kolo 57. ročníku, kategorie G – [3]). Úlohou pro žáky tedy může být *pomocí modelu z tužšího papíru najít střed České republiky.*

Jako pomůcky a materiál je možné použít tužší papír (např. desky od skicáku nebo část papírové krabice, formát A4), vytištěnou mapu ČR (stačí obrys), nůžky, špendlík, příp. závaží a nit.

Žáci mohou postupovat tak, že si vytisknou mapu ČR, podle ní vystřihnou tvar ČR z tužšího papíru (necháme je přemýšlet, jak tvar ČR z jednoho papíru na druhý převést) a najdou těžiště tužšího papíru. Těžiště mohou najít na základě podpírání tužšího papíru, pomocí závaží na niti nebo na základě „sjíždění prstů“.

Výsledek experimentu je možné porovnat s velmi názornou mapou v [4]. Jak už název odkazovaného příspěvku, *Hledáte střed Česka? Ale který?*, naznačuje, je pojem „střed území” víceznačný. Kromě geometrického středu (u obce Číhošť), který může sloužit k porovnání experimentálně určeného výsledku, je zde uveden také např. střed podle hranic, střed diagonál nebo populační střed.

Ze zkušeností s touto aktivitou vyplývá, že poloha experimentálně určeného těžiště našeho modelu se od polohy geometrického středu ČR typicky liší pouze o jednotky kilometrů (převedeno na skutečnou vzdálenost). Obdobně můžeme nechat žáky experimentálně určovat střed vesnice, města nebo kraje, kde žijí.

Závěr

V tomto příspěvku byly představeny čtyři náměty týkající se těžiště. Jedná se o náměty spadající spíše do středoškolské fyziky, ale po mírném zjednodušení je lze využít i na základních školách. Aktivity, které je možné na základě uvedených námětů realizovat, mohou do značné míry provádět samostatně žáci. Mohou je vést k hlubšímu přemýšlení nad fyzikou a obecněji nad okolním světem; náměty poukazují na využívání analogií, vztah model–realita a na mezipředmětové vztahy fyziky.

Literatura

[1] http://vnuf.cz/sbornik/
[2] Musilová J.: *Fyzikální omyly ve výuce mechaniky.* Československý časopis pro fyziku, 62(5–6), 2012, s. 346–357.
[3] http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/57/fo57g1_z.pdf
[4] http://www.skolniatlassveta.cz/hledate-stred-ceska-ale-ktery/