Paradox dvou kondenzátorů

JIŘÍ KOHOUT, PAVEL MASOPUST
Oddělení fyziky, Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita v Plzni

Abstrakt

V současné době není problém sehnat poměrně levně kondenzátory mající kapacitu větší než 1 F. S těmito součástkami je možné i bez speciálních měřicích systémů realizovat řadu zajímavých experimentálních úloh souvisejících s přechodovými ději, jež by mohly žákům lépe přiblížit tuto poměrně obtížnou oblast fyziky. Cílem tohoto příspěvku je teoreticky i experimentálně rozebrat tzv. paradox dvou kondenzátorů, který odkazuje ke zdánlivému porušení zákona zachování energie při přechodovém ději, kdy k nabitému kondenzátoru připojíme další o stejné kapacitě. Budou rovněž uvedeny náměty na laboratorní práce realizovatelné ve výuce elektřiny na SŠ.

Úvod

Kondenzátor je jednou ze základních elektrotechnických součástek a ve výuce fyziky na SŠ je mu obvykle věnována pozornost na konci tematického celku Elektrostatika. Tato součástka je předmětem i některých laboratorních prací realizovaných na školách, v gymnaziální učebnici elektřiny a magnetismu je například popsáno měření kapacity kondenzátoru pomocí střídavého proudu, na webových stránkách některých gymnázií (např. Jiráskovo gymnázium Náchod - http://fyzika.gymnachod.cz/) pak lze nalézt návody například na určení kapacity z vybíjecí křivky, jež je realizováno pomocí měřicího systému Vernier.

Tento systém je třeba užít mimo jiné proto, že kapacita kondenzátorů dostupných běžně ve školách je poměrně malá (maximálně milifarady) a v důsledku toho trvá přechodový děj při nabíjení i vybíjení, jehož délka je přímo úměrná kapacitě kondenzátoru C a odporu připojeného rezistoru R, jen velmi krátkou dobu. To s sebou nese určité nevýhody. Není například možné realizovat rozumně pokus se žárovkou zapojenou do nabíjecího obvodu kondenzátoru a ukázat žákům, jak tato žárovka svítí na začátku nabíjení a její jas postupně klesá s tím, jak se vyrovnává napětí zdroje s napětím na kondenzátoru. Stejně tak není možné názorně demonstrovat závislost doby trvání přechodového děje na velikosti odporu rezistoru. Tyto faktory mohou negativně ovlivnit pochopení žáků, protože nemají možnost si děje demonstrující fungování kondenzátorů přímo „osahat“. V současné době však již existuje poměrně jednoduché a levné řešení, a to využití tzv. **superkondenzátorů** s velkou kapacitou.

Superkondenzátory a jejich vlastnosti

Je všeobecně známo, že kapacita deskového kondenzátoru je přímo úměrná ploše desek a dielektrické konstantě (relativní permitivitě) dielektrika uvnitř, a nepřímo úměrná vzdálenosti desek. Jaké možnosti tedy máme, když chceme velmi výrazně zvýšit kapacitu součástky? Kvalitnější dielektrikum nebude mít zásadní efekt, protože je velmi obtížné najít materiál s dielektrickou konstantou větší než 10 (příkladem je třeba oxid hafnia, jehož příprava ve formě tenké vrstvy je však dosti náročná). Zbývá tedy možnost zvětšit výrazně plochu desek či zmenšit mezeru mezi nimi. Zvětšení plochy však nesmí jít proti snaze o miniaturizaci příslušných součástek. Dostáváme se tak do světa nanotechnologií, kde došlo v uplynulých letech k tak výraznému rozvoji, že jsou již běžně vyráběny kondenzátory s odpovídající vzdáleností v řádu desetin nanometru (jde vlastně o tloušťku dvojvrstvy na rozhraní elektrody a elektrolytu, v níž je soustředěna energie – viz heslo *Supercapacitor* na Wikipedii) a specifickou plochou elektrod až 3 000 metrů čtverečních na gram. Díky tomu je možné získat superkondenzátory s kapacitou v řádu tisíců faradů.

Jako perspektivní materiály pro elektrody se zde jeví například uhlíkové nanotrubičky a často je používán i grafén. Technologií výroby i využitelných materiálů je však značné množství. Daná problematika je detailně shrnuta například ve studii [1]. Cena superkondenzátorů, jež jsou dostupné v e-shopech, obvykle roste znatelně s kapacitou. Zatímco kondenzátor 1,5 F je tak možné pořídit za méně než 100 Kč, kapacita 7,5 F již vyjde na více než 200 Kč, 500 F na cca 800 Kč a elektrolytický superkondenzátor s kapacitou 3 000 F vyjde již na více než 3 000 Kč.

S rostoucí kapacitou superkondenzátorů klesá maximální dovolené napětí U, což je podstatné pro celkovou energii, která může být v těchto součástkách uložena. Příčina je jednoduchá – zvýšení kapacity se dosahuje výrazným zmenšením vzdálenosti mezi elektrodami d, což při uvážení vztahu pro intenzitu elektrického pole E uvnitř deskového kondenzátoru ve tvaru $E = \frac{U}{d}$ vede k velmi vysoké intenzitě již při malém napětí. Hrozí tak průraz dielektrika a zničení kondenzátoru. V případě součástek s kapacitou v řádu stovek či tisíců faradů je tak běžně uváděno maximální dovolené napětí jen cca 3 V. Energie E_0, jež může být v kondenzátoru uložena, je i tak obrovská, když například pro kapacitu C = 3 000 F a napětí U = 2,7 V dostáváme $E_0 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = 10\,935\,\mathrm{J}$. Není tak překvapivé, že superkondenzátory nacházejí uplatnění především v aplikacích, kde je třeba uchovat velké množství energie. Často se hovoří o významu těchto součástek pro elektromobilitu, kde by mohly nahradit baterie (výhodou kondenzátorů je rychlé nabíjení, problematická je však nízká energetická hustota). Bližší informace k aplikacím jsou uvedeny například v článku [2].

Využití superkondenzátorů ve výuce

Zásadní otázkou je, jak tuto ve vědě dynamicky se rozvíjející oblast, didakticky transformovat do školské fyziky. Je samozřejmě možné superkondenzátory zmínit jako zajímavou alternativu k bateriím a zaměřit se na jejich aplikace včetně diskuze výhod a nevýhod. Zajímavé mohou být i početní příklady inspirované reálnými vlastnostmi těchto součástek Zvláštní pozornost by pak měla být věnována pochopení toho, proč velká kapacita vede k velmi malému maximálnímu napětí tak, aby si žáci uvědomili, proč se na kondenzátorech uvádí vedle kapacity právě údaj o napětí (je možné například počítat intenzitu elektrického pole pro dané hodnoty a srovnat ji s dielektrickou pevností různých materiálů apod.).

Nejvhodnější je však podle našeho názoru využít tyto součástky přímo k demonstraci vlastností kondenzátorů a k experimentální práci žáků. Pro tento účel je zcela zbytečné vydávat velké sumy za superkondenzátory s extrémně vekou kapacitou, postačují hodnoty v řádu jednotek faradů, kde cena není zdaleka tak velká a je tudíž větší šance objednat si více kusů. V další části uvedeme několik námětů na konkrétní aktivity v této oblasti.

Nabíjecí a vybíjecí křivka kondenzátoru

Se superkondenzátorem a potenciometrem (popř. odporovou dekádou) je možné snadno demonstrovat, jak rychlost nabíjení závisí na odporu v příslušném obvodu. K nabíjenému kondenzátoru připojíme voltmetr a pozorujeme narůstající napětí na kondenzátoru. V případě, že skokově zvětšíme odpor, rychlost nabíjení se výrazně zpomalí. Při vhodné volbě velikosti odporu je přechodový děj natolik pomalý, že žáci mohou po určitých časových krocích zaznamenávat hodnotu napětí a následně v Excelu zpracovat získaná data a zjistit, do jaké míry jsou v souladu s exponenciálním průběhem napětí. Je rovněž možné do nabíjecího obvodu připojit žárovku a pozorovat, jak se s rostoucím napětím kondenzátoru snižuje její jas. Podobně lze postupovat i při vybíjení, kde je zajímavé sledovat, že kondenzátor se po odpojení zdroje zvolna vybíjí sám i bez připojení odporu. Je to v důsledku tzv. ztrátového proudu (*leakage current*), který prochází mezi deskami kondenzátoru, protože příslušné dielektrikum není dokonalý izolátor. Velikost tohoto ztrátového proudu (a tudíž rychlost samovolného vybíjení) je důležitou charakteristikou kvality součástky. U běžně dostupných superkondenzátorů je tento efekt sice patrný, ale není tak výrazný, aby svojí rychlostí mohl konkurovat vybíjení přes rezistor.

Paradox dvou kondezátorů

Jedná se o velice zajímavý problém, kdy je ke kondenzátoru s kapacitou C nabitému na napětí U nábojem Q připojen stejný nenabitý kondenzátor. V důsledku toho se napětí na obou kondenzátorech vyrovnají a dle zákona zachování náboje a známého vztahu $Q = C \cdot U$ bude na obou kondenzátorech náboj $\frac{Q}{2}$ a napětí $\frac{U}{2}$. Před připojením nenabitého kondenzátoru byla energie elektrického pole dána vztahem $E_A = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$. Po připojení je součet energií elektrických polí v obou kondenzátorech vyjádřen vzorcem

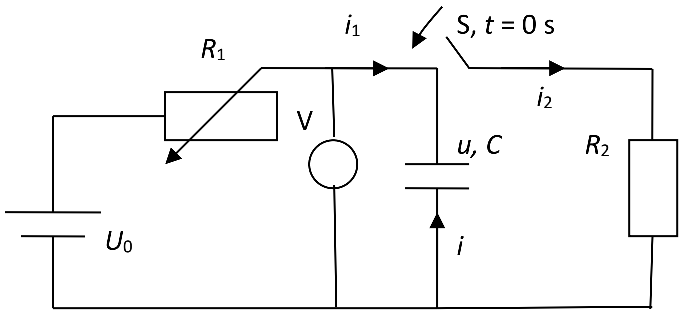
$$E_B = E_1 + E_2 = \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{2 \cdot C} + \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{2 \cdot C} = \frac{Q^2}{4 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot E_A .$$

Vidíme tedy, že celková energie elektrického pole klesla po připojení nenabitého kondenzátoru na polovinu. Je otázka, co se stalo s druhou polovinou. Pokud mezi nabitý a nenabitý kondenzátor nezapojíme rezistor a spojíme je jen přívodními vodiči, málokoho napadne, že druhá polovina se přeměnila na teplo v těchto vodičích. Právě tato odpověď je však správná, což lze za pomoci Joulova-Lenzova zákona a vyšší matematiky snadno dokázat (jde vlastně o to ukázat, že uvolněné teplo je nezávislé na odporu a je vždy rovno právě polovině energie elektrického pole nabitého kondezátoru). Důkaz je proveden v [3], detailnější řešení problému z didaktického hlediska zahrnující i odkazy na další relevantní literaturu je pak k dispozici v [4].

Podstatné je, jak uvedený paradox demonstrovat experimentálně. Jako zajímavá demonstrace se jeví propojení nabitého a nenabitého kondenzátoru přes objekt s malým odporem, například přes kousek alobalu. Vzhledem k tomu, že časová konstanta přechodového děje je přímo úměrná odporu (a je tudíž velmi malá), bude proud natolik velký, že povede k přepálení proužku alobalu, což jasně demonstruje jednak značnou energii akumulovanou v kondenzátoru (například pro kapacitu 7,5 F a napětí 5 V je to téměř 100 J), jednak poté uvolnění její podstatné části ve spojovacím vodiči mezi oběma kondenzátory a to i v případě, že je jeho odpor velmi malý. Demonstraci je možné provést různými způsoby, lze například „kreslit“ výbojem pomocí ostrých vývodů vodičů do alobalu při vybíjení kondenzátoru apod.

Laboratorní práce – rovnováha obvodu s kondenzátorem

Uveďme ještě námět na jednu konkrétní laboratorní práci úzce související s paradoxem dvou kondenzátorů. Uvažujme obvod s kondezátorem zapojený dle Obrázku 1, z něhož je zároveň patrné značení užívané v dalších výpočtech. Kondenzátor je na počátku nabit na napětí zdroje U_0, proud obvodem neprotéká. V čase t = 0 s je sepnut spínač S a kondenzátor se začne vybíjet přes rezistor o odporu R_2. Zároveň je však stále připojen ke zdroji napětí, a proto se nevybije úplně a napětí na něm se po určité době ustálí na hodnotě U_u. Je třeba experimentálně zjistit, jaká tato ustálená hodnota bude a jak dlouho bude trvat přechodový děj, a rovněž porovnat naměřené hodnoty s teorií.



Obrázek 1 – zapojení obvodu s kondenzátorem

V ustáleném stavu musí být napětí na kondenzátoru U_u stejné jako úbytek napětí na rezistoru o odporu R_2, musí tedy platit vztah $U_u = R_2 \cdot i_2$. Zároveň je však rozdíl napětí zdroje a napětí na kondenzátoru roven úbytku napětí na potenciometru, takže platí vztah $U_0 - U_u = R_1 \cdot i_1$. V ustáleném stavu jsou však oba proudy i_1 a i_2 stejné (kondenzátor se ani nenabíjí ani nevybíjí). Platí:

$$U_0 - U_u = R_1 \cdot i_1 \to U_0 - U_u = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_2 \cdot i_2 \to U_0 - U_u = \frac{R_1}{R_2} \cdot U_u \to U_u = \frac{R_2 \cdot U_0}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

Obtížnější je řešení přechodového děje, jež je založeno na zjištění závislosti napětí na kondenzátoru na čase $u(t)$. Aplikací Kirchhoffových zákonů a vztahu $Q = C \cdot U$

dostáváme po úpravách diferenciální rovnici pro neznámou funkci $u(t)$ s počáteční podmínkou $u(0)= U_0$ ve tvaru:

$$C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{U_0}{R_1}. \tag{2}$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou, jejíž partikulární řešení $u_p = \frac{R_2 \cdot U_0}{R_1 + R_2}$ evidentně odpovídá ustálenému stavu obvodu. Po vyřešení odpovídající homogenní rovnice a zohlednění počáteční podmínky získáme následující časovou závislost:

$$u(t) = \frac{R_1 \cdot U_0}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \cdot t} + \frac{R_2 \cdot U_0}{R_1 + R_2}. \tag{3}$$

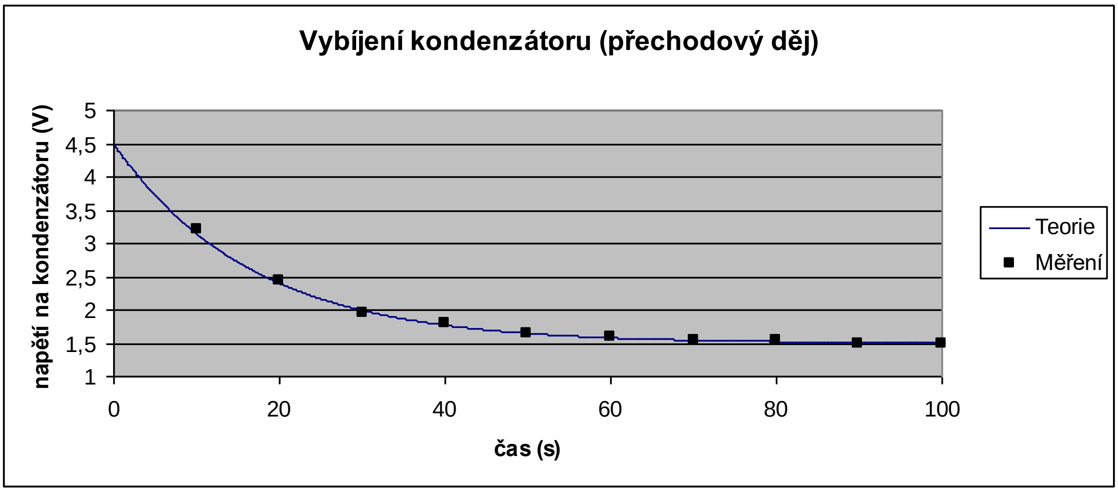
První člen přitom odpovídá přechodovému ději, zatímco druhý člen ustálenému stavu obvodu. Doba trvání přechodového děje přitom bude dána výrazem

$$\tau = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C}{R_1 + R_2}, \tag{4}$$

jenž udává **časovou konstantu** tohoto děje. Je tedy zjevné, že jeho doba trvání bude růst s rostoucí kapacitou kondenzátoru a bude záviset rovněž na odporu rezistoru a potenciometru.

K realizaci úlohy budeme potřebovat zdroj napětí (plochá baterie), kondenzátor o velké kapacitě (např. 1,5 F), digitální voltmetr, rezistor o odporu v řádu jednotek ohmů, potenciometr či odporovou dekádu, digitální multimetr, stopky, spínač a spojovací vodiče. Zapojíme obvod dle Obrázku 1 a necháme nabít kondenzátor přes potenciometr, u něhož digitálním multimetrem měříme odpor. Při nabíjení přitom pozorujeme, jak změny odporu potenciometru ovlivňují rychlost nabíjení kondenzátoru, jehož napětí měříme voltmetrem. Po ustálení hodnoty napětí zkusíme na chvíli odpojit zdroj a sledujeme, jak rychle se kondenzátor vybíjí v případě, že není připojen spotřebič. Pokles napětí během jedné minuty si poznamenáme a poté kondenzátor opětovným připojením ke zdroji dobijeme na maximální hodnotu. Následně sepneme spínač, pustíme stopky a pozorujeme pokles napětí na kondenzátoru (potenciometr máme nastavený na cca 10 ohmů). Každých zhruba 10 sekund poté zaznamenáváme aktuální hodnotu napětí, přičemž čekáme, až se tato hodnota ustálí. Kritérium ustálení si zvolíme, může to být například to, že se údaj digitálního voltmetru nezmění po dobu alespoň 5 sekund. Zapíšeme si (vedle hodnoty odporu nastavené na potenciometru) ustálenou hodnotu napětí a dobu trvání přechodového děje. Následně vypneme spínač, kondenzátor opět nabijeme na maximum a proces opakujeme pro jinou hodnotu odporu potenciometru R_1. Tentokrát však již nezaznamenáváme průběžné hodnoty napětí, ale zjišťujeme pouze dobu trvání přechodového děje a výsledné napětí.

V rámci zpracování by žáci měli zjistit, jak závisí doba trvání přechodového děje na odporu potenciometru R_1. Zjištěné hodnoty je možné vynést do grafu. Dále by měli být schopni srovnat teoretický a skutečný průběh poklesu napětí na kondenzátoru a rovněž porovnat naměřenou ustálenou hodnotu s teorií například dle ukázky uvedené v Grafu 1 (hodnoty U = 4,5 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 5 Ω, C = 1,5 F).



Graf 1 – přechodový děj při částečném vybíjení kondenzátoru

V rámci zpracování protokolu by měly být zodpovězeny otázky týkající se například samovolného vybíjení kondenzátoru, omezeného dovoleného napětí a příčin odlišností mezi teoretickým a experimentálním průběhem. Je evidentní, že žáci stěží zvládnou výše uvedené odvození pomocí diferenciální rovnice. Měli by však rozumět základním vztahům vedoucím k jejímu sestavení a rovněž zvládnout analyzovat výše uvedené vztahy (3) a (4).

Závěr

Předložený příspěvek představuje úvod do problematiky využití superkondenzátorů ve výuce fyziky na střední škole. Nastiňuje některé možnosti, jak tyto zajímavé součástky využít ke zvýšení motivace žáků a ke zlepšení jejich porozumění funkci kondenzátoru. Dá se předpokládat, že s dalším rozvojem této techniky bude čím dál snazší si superkondenzátory pořídit do škol v dostatečném množství a rozšířit tak nabídku laboratorních prací pro žáky.

Literatura

[1] Sharma, K. a kol. Review of supercapacitors: Materials and Devices. *Journal of Energy Storage*, 2019, 21: 801-825.

[2] Libich, J. a kol. Supercapacitors: Properties and apllications. *Journal of Energy Storage*, 2018, 17: 224-227.

[3] Kohout J. Řešené příklady z elektřiny a magnetismu, úloha 175. Dostupné z http://home.zcu.cz/~jkohout4/EMG.doc [cit. 15.8.2019].

[4] Biolek Z.: Problém dvou kapacitorů v pedagogické praxi. Dostupné z http://www.valachnet.cz/biolek/articles/sto10.pdf [cit. 15.8.2019].