

## Vrtulníkem na Mount Everest ...?

PETR SLÁDEK, LUKÁŠ PAWERA, JAN VÁLEK

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Brno

### Abstrakt

Zprávy o záchraně pomocí vrtulníku se objevují téměř každodenně. Ne vždy si všichni uvědomují, že jeho možnosti jsou omezené fyzikálními zákony. Do jaké výšky může vrtulník nastoupat, může přiletět pro horolezce na Mount Everest? Můžeme to přibližně spočítat? A co takový experiment? Že ve vysokých nadmořských výškách je málo kyslíku, je všeobecně známo, ale že to souvisí s tlakem vzduchu a jeho hustotou si uvědomí jen někteří. Pokles tlaku s výškou je mnohem vyšší, než jsou všeobecné představy. Pro modelování letu vrtulníku do vysokých nadmořských výšek si vystačíme experimentem s dremem a školní vývěvou.

### Úvod

Můžeme vylétnout vrtulníkem nebo helikoptérou na Mount Everest? A je v tom rozdíl, čím poletíme? Rozdíl v tom není, neboť se jedná o synonyma. Výraz **helikoptéra** je starší a je složeninou z řeckých slov *helix* (spirála, šroub) a *pteron* (křídlo). Abychom byli úplní, výraz **vrtulník** zavedl Čech Antonín Opravil [1], spoluautor vojenské terminologie, činný v oboru kultury řeči a jazykové správnosti češtiny, rodák z Velké Bystřice u Olomouce (1886–1961). My budeme dále používat slovo vrtulník.

Vraťme se nyní k názvu našeho příspěvku, minimálně ve dvou hollywoodských filmech jsme mohli vidět scénu, kdy se vrtulník snaží vylétnout do vyšší nadmořské výšky, než běžně létá. Byly to *Vertical Limit* (2000) a *Everest* (2015). To samozřejmě nemůže zvědavé žáky a učitele fyziky nechat v klidu a podrobí tento jev zkoumání.

### Co potřebuje vrtulník k létání?

Médium o určité hustotě, aby se o něj mohl rotor vrtulníku „opřít“. Nejčastěji je to v běžných podmínkách samozřejmě vzduch. Přibližně v 7. ročníku základní školy v tematickém celku *Plyny* žáky seznamujeme s tím, že s rostoucí nadmořskou výškou klesá nejen tlak vzduchu, ale i jeho hustota. Tento pokles

můžeme početně demonstrovat na středoškolské úrovni pomocí barometrické formule pro tlak vzduchu a následně pak pro hustotu vzduchu. [2], [3], [4]

### Školský přístup k letu vrtulníku

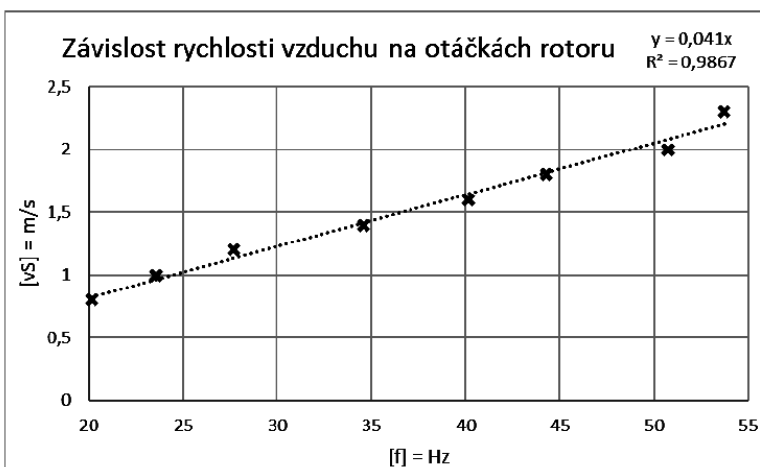
Vrtule/rotor tlačí rychlostí  $v_S$  přes rotorový disk (plocha kruhu o poloměru  $R$ , což je délka listu) vzduch dolů silou  $F_V$ . Tato síla za čas  $\Delta t$  způsobí změnu hybnosti prošlého objemu vzduchu  $V$  o hustotě  $\rho$ :

$$F_V \Delta t = \rho V v_S = \rho \pi R^2 \Delta l v_S,$$

kde  $\Delta l = v_S \cdot \Delta t$  je výška sloupce vzduchu protlačeného rotorovým diskem za čas  $\Delta t$ . Po úpravě:

$$F_V = \rho \pi R^2 v_S^2 \quad (1)$$

Rychlost  $v_S$  proudícího vzduchu přes rotorový disk je přímo úměrná úhlové rychlosti listů rotoru  $\omega$ . Tuto závislost lze experimentálně ověřit pomocí ventilátoru a anemometru (obr. 1 a obr. 2). S podobnými výsledky jsme provedli jiné měření, kde jsme dronem působili na siloměr a odečítali frekvenci otáček jednoho z rotorů, tedy čím vyšší byly otáčky rotoru, tím větší silou působil na siloměr.



Obr. 1 Závislost rychlosti proudícího vzduchu rotorovým diskem na otáčkách rotoru s proložením spojnice trendu



Obr. 2 Měření rychlosti vzduchu v rouře v závislosti na úhlové frekvenci vrtule

Pak pro  $F_V$  můžeme psát:

$$F_V = C_1 \rho \omega^2 \quad (2)$$

Změníme-li vztažnou soustavu, je zřejmé, že síla  $F_V$  je stejně velká jako síla  $F'_V$ , kterou je vrtulník nadnášen.

Při svislém pohybu vrtulníku působí proti jeho pohybu odpor vzduchu podle Newtonova zákona odporu:

$$F_W = \frac{1}{2} \rho C_W S v_S^2 \quad (3)$$

Vezmeme-li do úvahy opět lineární závislost  $v_S$  na  $\omega$  a konstanty shrneme do jedné, můžeme psát

$$F_W = C_2 \rho \omega^2. \quad (4)$$

Aby vrtulník letěl, musí platit

$$F'_V \geq F_G + F_W,$$

popřípadě

$$mg \leq (C_1 - C_2) \rho \omega^2.$$

Je zřejmé, že nadmořská výška, do které může vrtulník doletět, závisí na vzletové hmotnosti  $m$ , na otáčkách vrtule dané  $\omega$ , na tíhovém zrychlení  $g$  a na hustotě vzduchu  $\rho$ . První dvě zmíněné veličiny (i konstanty  $C_1$ ,  $C_2$ ) můžeme ovlivnit, např. konstrukcí vrtulníku, další dvě jsou určeny letovou polohou vrtulníku (nadmořská výška, zeměpisné souřadnice).

### Barometrická formule zohledňující teplotu vzduchu

Ve středoškolské fyzice můžeme zjistit, jak se lze k barometrické rovnici dopočítat. Bez znalosti integrálního počtu lze využít dynamického modelování například v tabulkovém procesoru a proložením regresní křivky získat příslušnou závislost.

Vzhledem k našemu případu (budeme se pohybovat v nadmořské výšce do 10 000 m n. m.) můžeme uvažovat atmosféru jako ideální plyn o stejné teplotě [5]. Tíhová síla Země tedy působí na atmosféru, na plyn v ní, a vzniká atmosférický tlak. Pro zjednodušení budeme uvažovat **konstantní** také **tíhové zrychlení  $g$** . Pro pokles tlaku  $dp$  s výškou  $h$  pak bude platit vztah

$$dp = -\rho g dh, \quad (5)$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu ve výšce  $h$  a  $dh$  je přírůstek výšky. Hustotu plynu určíme ze stavové rovnice

$$pV = Nk_bT = \frac{m}{M_m}R_mT = \frac{\rho V}{M_m}R_mT, \quad (6)$$

kde  $R_m$  je molární plynová konstanta  $R_m \approx 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_m$  je molární hmotnost,  $N = nN_A$  je počet molekul v objemu  $V$ ,  $N_A$  je Avogadrova konstanta  $N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Ze stavové rovnice může pak vyjádřit vztah pro hustotu:

$$\rho = \frac{pM_m}{R_mT} \quad (7)$$

Za **konstantní teploty** platí:

$$\rho = \frac{pM_m}{R_mT} = \frac{p}{p_0} \rho_0 \quad (7a)$$

Zde je také vidět, že pro naše účely, je důležité, že mezi tlakem vzduchu a jeho hustotou je přímá úměra. Dosazením (7) do (6) získáme:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{R_m T} dh \quad (8)$$

Když nyní (8) zintegrujeme, dostaneme:

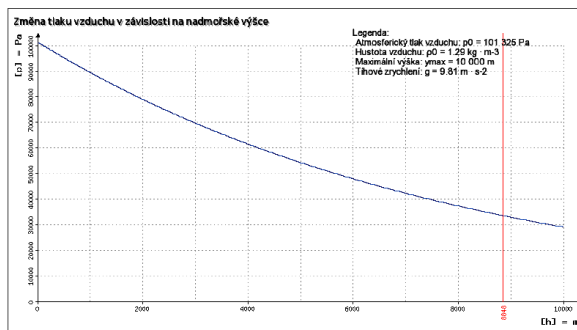
$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{M_m g}{R_m T} h \quad (9)$$

Odtud poté získáme nám známou barometrickou formuli pro tlak vzduchu (10) a pro hustotu vzduchu (11).

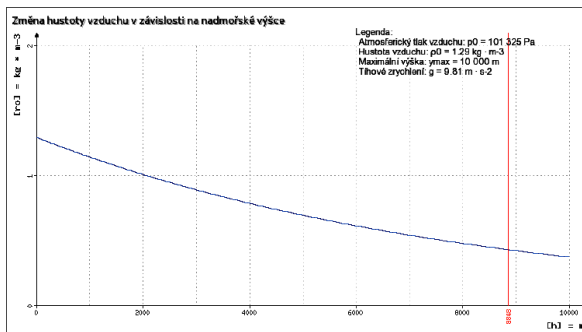
$$p = p_0 e^{-\frac{M_m g}{R_m T} h} = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}} \quad (10)$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}} \quad (11)$$

Grafickým znázorněním závislosti (10) a (11) na nadmořské výšce, popř. za pomoci dynamického modelování v rozsahu do 0–10 000 m n. m., zjistíme, že pokles je mnohem dramatičtější, než si mnozí představují.



Obr. 3 Změna tlaku vzduchu v závislosti na nadmořské výšce



Obr. 4 Změna hustoty vzduchu v závislosti na nadmořské výšce

Můžeme se v našich úvahách o výpočtech posunout dále. Budeme již uvažovat **měníci se teplotu s nadmořskou výškou** a to podle lineárního vztahu

$$T = T_0 - a(h - h_0), \quad (12)$$

kde  $T_0$  je teplota v počáteční výšce,  $a$  je teplotní gradient měnící se s výškou, jehož hodnota se pohybuje mezi 0,005–0,01 K/m. Standardní mezinárodně dohodnutá hodnota je  $a = 0,0065$  K/m. Rozdíl nadmořských výšek je pak  $h - h_0$ .

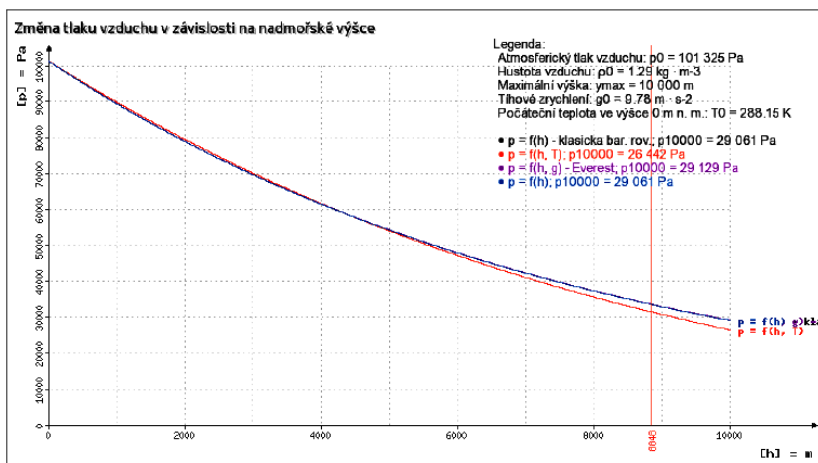
Opět vyjdeme ze stavové rovnice (6) a dosadíme do ní (12). Naše úvahy vedou po nepříliš obtížné středoškolské matematické úpravě na vztah

$$p = p_0 e^{\frac{Mg}{aR} \ln\left(1 - \frac{a\Delta h}{T_0}\right)},$$

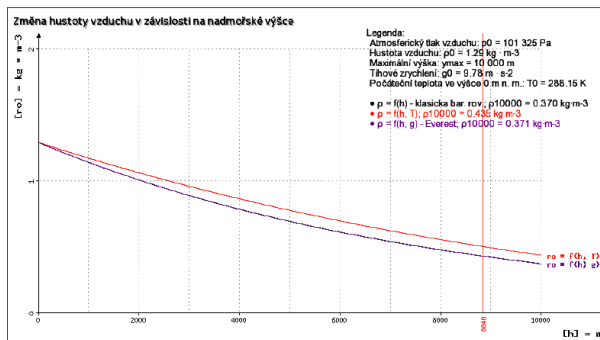
ze kterého po úpravě dostaneme tyto dva vztahy:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{a\Delta h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}} \quad (13)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a\Delta h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR} - 1} \quad (14)$$



Obr. 5 Změna tlaku vzduchu v závislosti na nadmořské výšce, teplotě a tíhovém zrychlení



Obr. 6 Změna hustoty vzduchu v závislosti na nadmořské výšce, teplotě a tíhovém zrychlení

### Tíhové zrychlení a poloha na Zemi

Další proměnná, která se může projevit na změně hustoty vzduchu je změna tíhového zrychlení s nadmořskou výškou a polohou na Zemi. K výpočtu použijeme vztah z [6]

$$g = g_0(1 + 5,2792 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi + 2,32 \cdot 10^{-5} \sin^4 \varphi) - 3,155 \cdot 10^{-7} h, \quad (15)$$

kde  $g_0 = 9,780\,327 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je hodnota tíhového zrychlení na rovníku,  $\varphi$  je zeměpisná šířka (pro ČR  $\varphi \approx 50^\circ$ , pro Everest  $\varphi \approx 28^\circ$  a pro rovník tedy  $\varphi \approx 0^\circ$ ) a  $h$  je nadmořská výška.

V tomto případě můžeme uvést, že změna tíhového zrychlení na nadmořské výšce se neprojevuje tak výrazně jak by se mohlo čekat (do 0,5 %), proto jsme tento parametr v našich výpočtech již dále neuvažovali. Vybrané hodnoty prezentuje tabulka 1.

Tab. 1: Vybrané hodnoty tíhového zrychlení uváděné v  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  v různé nadmořské výšce pro polohopisná místa

h (m n. m.)	ČR	Everest	Rovník
0	9,8107	9,7917	9,7803
1 603	9,8102	9,7912	9,7798
4 808	9,8092	9,7902	9,7788
8 848	9,8079	9,7889	9,7775
10 000	9,8075	9,7886	9,7772

Pozn.: Sněžka byla v roce 2014 přeměřena na 1 603,3 m n. m. [7] nejedná se tedy o překlep. 4 808 m n. m. pak reprezentuje Mont Blanc, nejvyšší horu Evropy.

### **Experiment s vývěvou**

Abychom si sami ověřili, zda se vrtulník může dostat až na Everest, přistoupili jsme k experimentu.

Pomocí školní vývěvy jsme simulovali snížený tlak ve vyšších nadmořských výškách. Pro zjištění „vytvořené“ nadmořské výšky jsme používali tlakoměr v režimu zobrazování nadmořské výšky v metrech. Běžná školní vývěva dokáže snížit tlak i více než je atmosférický tlak na Everestu, ale překvapením bylo, že tlakoměr po dosažení jím udávaných 8 848 m n. m. již nezobrazoval hodnotu.

Pod recipient jsme vložili dron (Syma X11), a zkoumali jsme sílu, jakou působí dron na siloměr podle nadmořské výšky při různých otáčkách vrtule. Ta se snižovala s klesajícím tlakem, tj. jakoby s rostoucí nadmořskou výškou, jak jsme předpokládali.

Abychom eliminovali vliv blízkosti podložky v malém recipientu, použili jsme rouru z plexiskla o délce 2 m a vnitřním průměru 22 cm (tu jsme již využili pro měření výše, viz obr. 2). Roura nám již dala dostatečné místo pro ověření našich teoretických předpokladů z první části příspěvku. Pro stabilnější let dronu jsme zkonstruovali vodičí tyče ze svářecích drátů o délce 1 m a klece pomocí 3D tiskárny (obr. 7).



Obr. 7: Dron ve vodičí kleci pro měření



Vliv hustoty plynu lze potvrdit tak, že jsme pod recipient, ev. rouru napustili místo vzduchu ( $\rho_{\text{VZDUCH}} = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) helium ( $\rho_{\text{He}} = 0,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) z lahve pro plnění pouťových balónků.

### **Změna tlaku v pedagogické praxi**

Učitel může žákům změnu tlaku demonstrovat například pomocí vývěvy a částečně seschlého jablka nebo bonbónu Marshmallow anebo mírně nafouknutého balónku.

### **Závěr**

Dovolíme si ještě historickou připomínku, že již Blaise Pascal (1623–1662) stoupal na horu Puy de Dôme (Centrální masiv, Francie) s nadmořskou výškou 1 464 m n. m. a pomocí Torricelliho pokusu měřil změnu tlaku vzduchu s nadmořskou výškou.

Jinými příklady, které již ale učitel může žákům pouze sdělit, nižší hustoty vzduchu ve vyšší nadmořské výšce jsou sportovci. Ti trénují ve vyšších nadmořských výškách, aby dokázal jejich Hemoglobin v nižších nadmořských výškách lépe vázat a rozvádět kyslík po těle.

Kde se ve sportu uplatňuje nižší hustota, je například rychlobruslení. Utah Olympic Oval v Salt Lake City leží v nadmořské výšce 1 423 m n. m. a jedná se tak o nejvýše položenou krytou halu na světě. Druhá nejvýše položená hala je Olympic Oval v Calgary (1 105 m n. m.). V těchto dvou halách bylo vytvořeno 13 ze 14 světových rekordů v mužské kategorii a 12 ze 13 v ženské kategorii.

To jsou důkazy tak říkajíc pro člověka, ale pro techniku? To jsou právě vrtulníky, které se potýkají s problémy během letu s klesající hustotou vzduchu.

Na Mount Everest vrtulníkem? Ano, ale ne ledajakým!

### **Literatura**

- [1] Bečková, K. Vymyslel "samopal", ale kuřeti by neublížil. *Aktuálně.cz* [online]. *Economia*, 2010 [cit. 2017-08-04]. Dostupné z: <http://blog.aktualne.cz/blogy/katerina-beckova-.php?itemid=11701>
- [2] Válek, J., Sládek, P. Vrtule a drony. In Věra Koudelková. *Veletrh nápadů učitelů fyziky 20*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství P3K s.r.o. s., 2016, 259-264, 6 s. ISBN 978-80-87343-58-6.

- [3] Brain, M., Harris, W. How Helicopters Work. *HowStuffWorks.com* [online]. 2015 [cit. 2017-08-07]. Dostupné z: <http://science.howstuffworks.com/transport/flight/modern/helicopter3.htm>
- [4] Rügenbeck, Ch. Hubschrauber und Fliegen. *PHYSIK in der Schule*. 2015, (2): 47-49.
- [5] Konrád, L., Kříž, J., Studnička, F., Vybíral, B. Kinetická teorie plynů v úlohách Slovenské fyzikální olympiády. *Československý časopis pro fyziku*. Grafotechna Print, 2017, 2017(3), 174-177. ISSN 0009-0700.
- [6] Gravity of Earth. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2017 [cit. 2017-07-27]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity\\_of\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth)
- [7] Vítková, K. Přeměřená Sněžka "povyrostla" na 1603 metrů, vrchol má v Polsku. MAFRA, A. S. *IDNES.cz* [online]. MAFRA, 2014, 2014-02-11 [cit. 2017-07-27]. Dostupné z: [http://hradec.idnes.cz/snezka-meri-1603-metru-nad-morem-dk2-/hradec-zpravy.aspx?c=A140211\\_090759\\_hradec-zpravy\\_kvj](http://hradec.idnes.cz/snezka-meri-1603-metru-nad-morem-dk2-/hradec-zpravy.aspx?c=A140211_090759_hradec-zpravy_kvj)

ú