Experimentální realizace Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA, JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého, Olomouc

Abstrakt

Tato práce se zabývá experimentální realizací Buquoyovy úlohy. Jedná se o systém s proměnnou hmotností, na který působí konstantní tahová síla. Naším cílem bylo sestavit funkční Buquoyův oscilátor, který by měl takové parametry, aby realizaci kmitů bylo možné provést v běžné učebně. Na základě výpočtů jsme postupně stanovili lineární hustotu vlákna, zvolili vhodný materiál vlákna, určili tahovou sílu balónku naplněného heliem a provedli videoanalýzu pohybu vlákna pomocí programu Tracker. Na závěr jsme se pokusili experimentálně naměřená data nafitovat v programu Wolfram Mathematica.

Úvod

Při návrhu experimentálního provedení bylo třeba nejprve určit lineární hustotu vlákna. Jako zdroj konstantní tažné síly byl zvolen balónek naplněný heliem. Pro zjednodušení výpočtu jsme předpokládali přibližně kulový tvar balónku.

Vztah pro stacionární řešení diferenciální rovnice je podle [1] dán následujícím vztahem (1)

$$y_{\mathrm{c}} = \frac{F}{\eta g}, \tag{1}$$

kde y_{c} je výška konce vlákna nad zvolenou nulovou potenciální hladinou ve stavu, kdy se vlákno nepohybuje a výsledná síla je nulová, F je svisle vzhůru působící konstantní síla, η je lineární hustota vlákna a g = 9,81 m·s^{-2}.

Protože jsme chtěli dosáhnout toho, aby bylo možné experiment demonstrovat ve třídě, jejíž maximální výška bývá cca 330 cm, při odhadu lineární hustoty jsme volili y_{c} = 2 m a maximální výšku $y_{\mathrm{M}} \sim \frac{3}{2} y_{\mathrm{c}} \sim 3\,\mathrm{m}$.

Průměrná hodnota průměru balónku byla určena z jeho obvodu jako $d = (30 \pm 2)$ cm, jeho poloměr je tedy $r = (15 \pm 1)$ cm. Uvažujeme-li přibližně kulový tvar, je objem balónku $V \cong 0{,}014\ 130$ m^3.

Na balónek naplněný heliem podle Archimédova zákona působí ve vzduchu vztlaková síla $F_{\mathrm{VZ}} = V\rho g$, která je současně tažnou silou působící na balónek. Lineární hustotu pak můžeme vyjádřit jako

$$\eta = \frac{V\rho}{y_{\mathrm{c}}}, \tag{2}$$

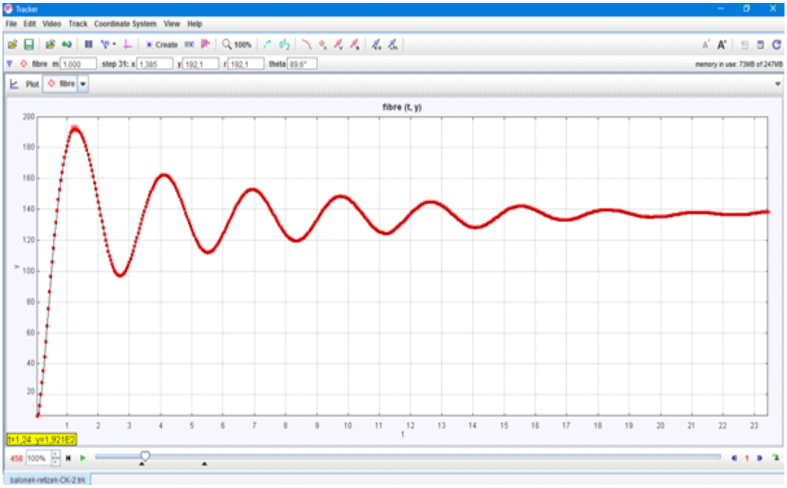
kde V je objem balónku a ρ je hustota vzduchu. Po dosazení konkrétních hodnot získáme přibližný odhad lineární hustoty vlákna $\eta = 9{,}11\ \mathrm{g\ m^{-1}}$.

Aby se hmotnost vlákna se stoupající výškou balónku zvyšovala lineárně, musí být vyrobeno optimálně z jednotlivých malých částí, které jsou vzájemně propojeny. Jako optimální se nakonec ukázal řetízek tvořený malými kuličkami používaný většinou v koupelně u umyvadla nebo vany. Protože i zde výrobci dodávají různě velké kuličky, zvolili jsme nakonec řetízek s nejmenšími kuličkami, jehož lineární hustota byla změřena digitální váhou jako $\eta = (10{,}4 \pm 0{,}01)\ \mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$.

Realizace experimentu

Na obr. 1 je Buquoyův oscilátor v rovnovážné poloze. Obr. 2 ilustruje výsledný graf závislosti y-ové souřadnice konce vlákna (řetízku) na čase, který jsme vytvořili pomocí videoanalýzy jeho pohybu v programu Tracker.

Obr. 1 Balónek naplněný heliem zavěšený na řetízku



Obr. 2 Oscilogram vzniklý videoanalýzou pohybu řetízku

Z grafu na obr. 2 plyne, že stacionární poloha je přibližně $y_\mathrm{m} = 1{,}38$ m, výpočtem určená hodnota podle vztahu (1) dává při tahové síle $F = 0{,}136$ N výsledek $y_\mathrm{c} = 1{,}33$ m, který je o 4 % menší než experimentálně naměřená hodnota.

Maximální výška výstupu určená experimentálně z grafu 2 je $y_\mathrm{M} = 1{,}92$ m. Použijeme-li přibližný vztah pro výpočet y_M uvedený výše, získáme hodnotu $y_\mathrm{M} = 2{,}07$ m, která je přibližně o 8 % větší.

Pro přesný výpočet můžeme použít vztah (3), viz [1]:

$$y_\mathrm{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y_\mathrm{c} - y_\mathrm{m}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left(y_\mathrm{c} - y_\mathrm{m}\right)^2 - 4y_\mathrm{m}^2}\,, \tag{3}$$

kde y_m je počáteční výška balónku (konce řetízku) při pohybu vzhůru s nulovou počáteční rychlostí. Tento vztah můžeme za předpokladu, že $y_\mathrm{m} = 0$ zjednodušit na vztah (4):

$$y_\mathrm{M} = \frac{3}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)y_\mathrm{c} \approx 1{,}3624\,y_\mathrm{c}. \tag{4}$$

Po dosazení do vztahu (4) za $y_\mathrm{c} = 1{,}38$ m získáváme hodnotu $y_\mathrm{M} = 1{,}88$ m, která je pro změnu o 2 % menší než hodnota určená experimentálně. Uvážímeli nejistotu měření přibližně 2 cm, která vznikne nastavením souřadných os a délky kalibrační tyče v programu Tracker, na jednom metru délky získáme stejnou relativní nejistotu, tj. 2 %. Z experimentu tedy plyne v rámci 2 % nejistoty měření velice dobrá shoda teorie s experimentálně naměřenými daty pro maximální výšku výstupu.

Všechna měření byla realizována s nulovou počáteční rychlostí. Z obr. 2 je také vidět charakter kmitů vlákna, které koná tlumené kvaziperiodické kmity s periodou blízkou periodě T_{S}, pro kterou platí podle [1] rovnice (5):

$$T_{\mathrm{S}} = \frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{F}{\eta}}. \tag{5}$$

Námi změřená taková síla balónku pomocí siloměru Vernier byla $F = (0{,}136 \pm 0{,}006)$ N a hodnota periody vypočítaná podle (5) je $T_{\mathrm{S}} = 2{,}31$ s.

Experimentálně zjištěná průměrná hodnota periody podle grafu 2 je $T_{\mathrm{exp}} = (2{,}85 \pm 0{,}02)$ s. Rozdíl mezi teoreticky vypočítanou hodnotou a experimentálně naměřenou, která je větší, lze vysvětlit tím, že pohyb balónku i vlákna nebyl po celou dobu pohybu kolmý k podložce. Balónek se pohyboval chvílemi i v horizontálním směru, takže došlo k prověšení vlákna a vlečení jeho části po podložce.

Wolfram Mathematica

Simulace pohybu řetízku upevněného k balónku je založena dle [1] na pohybové rovnici (6):

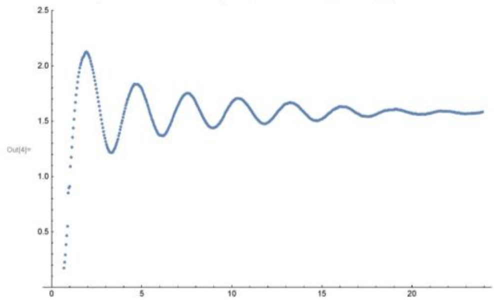
$$\ddot{y} = g\left(\frac{y_{\mathrm{c}}}{y} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}\dot{y}\right)\frac{\dot{y}^2}{y}. \tag{6}$$

Tato diferenciální rovnice speciálním způsobem závisí na rychlosti. V programu Wolfram Mathematica jsme rovnici řešili numericky při využití parametrů daných experimentem.

Na obr. 3 je zobrazena část kódu generující průběh pohybu konce řetízku, který jsme získali z experimentálně naměřených dat. Průběh je identický s funkcí získanou videoanalýzou v programu Tracker na obr. 2.

Obr. 4 ukazuje řešení pohybové rovnice (6) v programu Mathematica (modrá křivka) a experimentálně získaná data (černá křivka). Na první pohled je viditelný rozdíl mezi oběma křivkami, který je patrně způsoben odporem vzduchu. Černá křivka vykazuje výraznější tlumení i větší kvazi-periodu mezi jednotlivými průchody rovnovážnou polohou.

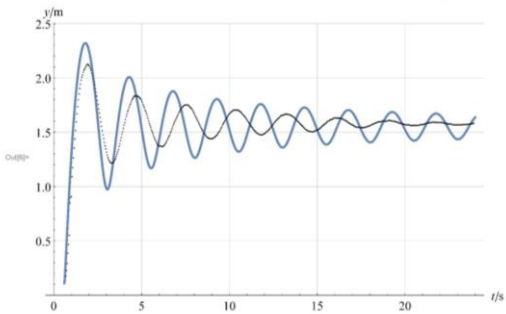
```
In[1]:= SetDirectory[NotebookDirectory[]];
In[2]:= data = Flatten[Import["BuqoyOSC-data-graf.xlsx"], 1];
In[3]:= oscilace =
          Table[Take[data, 20 ;; Length[data]][[n]][[{1, 4}]], {n, Length[data] - 19}];
        ListPlot[oscilace, PlotRange → {Automatic, {0, 2.5}}]
```




```
In[5]:= g = 9.81;
```

Obr. 3 Průběh pohybu konce řetízku v programu Mathematica získaný z experimentálních dat

```
In[6]:= Module[{sol =
          NDSolve[{y''[t] == g * (1.55 / y[t] - 1) - 0.5 * (1 + Sign[y'[t]]) * y'[t]^2 / y[t],
            y[0.6] == 0.11, y'[0.6] == 0}, y, {t, 0.6, 24}]},
         Show[Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0.6, 24}, PlotRange → {Automatic, {0, 2.5}},
           BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}, AxesLabel → {"t/s", "y/m"},
           GridLines → Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.005]}],
          ListPlot[oscilace, PlotStyle → {Black, PointSize[0.002]}]]]
```



Obr. 4 Řešení pohybové rovnice (modrá křivka) a reálný průběh pohybu (černá křivka)

Závěr

V naší práci jsme se zabývali experimentálním ověřením pohybu vlákna s proměnnou hmotností v poli konstantní a tíhové síly. Tento pohyb je znám z historie pod názvem Buquoyova úloha, protože hrabě J. F. A. Buquoy (1781–1851) se jako první zabýval řešením úloh na pohyb soustav s proměnnou hmotností už v roce 1814.

V první fázi jsme museli nejprve vyřešit realizaci parametrů tohoto oscilátoru, kterými jsou tažná konstantní síla a lineární hustota vlákna. Za zdroj síly jsme nakonec zvolili balónek naplněný heliem o průměru $d = (30 \pm 2)$ cm, ke kterému jsme připevnili koupelnový řetízek složený z jednotlivých malých kuliček, jehož lineární hustota byla experimentálně určena jako $\eta = (10{,}4 \pm 0{,}01)\ \mathrm{g\ m^{-1}}$.

Pohyb řetízku jsme analyzovali nejprve pomocí videoanalýzy v programu Tracker a potom jsme takto získaná data fitovali teoretickou křivkou v programu Wolfram Mathematica.

V rámci 2 % nejistoty měření jsou v dobré shodě experimentálně naměřené hodnoty maximální výšky výstupu a stacionární polohy s teoreticky vypočítanými. Reálný průběh pohybu se však od teoretického modelu liší jak v hodnotách amplitud, tak v hodnotách period pro pohyb vzhůru i dolů.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [1]. Rozdíl je zřejmě způsoben odporem vzduchu při pohybu balónku, který autoři v [1] do modelu nezahrnuli.

Literatura

[1] Šíma, V, Podolský, J.: Buquoyova úloha, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 3, 177-186. Dostupné na: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141315/PokrokyMFA_51-2006-3_1.pdf