Vodní paraboloid

ZDENĚK ŠABATKA, LEOŠ DVOŘÁK
MFF UK Praha

Příspěvek popisuje, jak jednoduše teoreticky odvodit a experimentálně zkoumat tvar hladiny vody v rotující nádobě, a zmiňuje některé související zajímavé problémy.

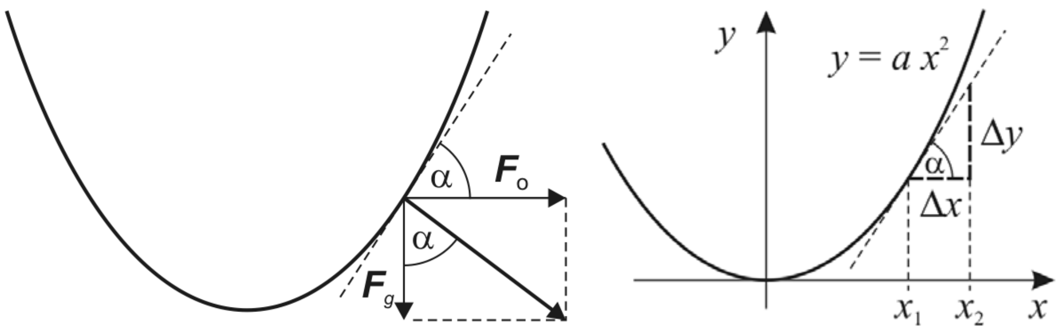
Úvod: vodní paraboloid teoreticky

Snad každý, kdo studoval úvodní vysokoškolský kurz fyziky, se setkal s úlohou spočíst tvar hladiny v rotující nádobě. (Viz např. [1], s. 339-341.) Výsledek můžeme najít i ve starší populární literatuře ([2], s. 219): hladina má tvar rotačního paraboloidu.

Skutečnost, že hladina vody v rotujícím vědru či jiné nádobě je prohnutá, je jednoduše pochopitelná i na úrovni základní školy: Odstředivá síla (kterou zná na vlastní kůži každý, kdo projel v autě ostřejší zatáčku, o zkušenosti z různých pouťových atrakcí nemluvě) táhne vodu směrem od osy rotace, gravitace ji táhne dolů a výsledný tvar hladiny je dán „soupeřením" těchto sil.

Víme-li, že odstředivá síla při konstantních otáčkách (tedy při konstantní úhlové rychlosti ω) roste se vzdáleností r od osy rotace, lze také jednoduše pochopit, že dál od osy je hladina strmější a strmější. Výsledná síla na „kousek vody" se s rostoucí vzdáleností od osy více a více odchyluje od svislice – a hladina musí být na tuto výslednou sílu kolmá. (Místo teoretického zdůvodnění můžeme žákům připomenout, že hladina klidného rybníka či vody ve sklenici je také kolmá na sílu, působící na vodu.)

Na středoškolské úrovni již víme, že velikost odstředivé síly na kousek látky o hmotnosti m je $F_o = m\omega^2 r$. Skutečnost, že parabola je tou pravou křivkou popisující profil hladiny, odtud můžeme dokázat zcela bez použití vyšší matematiky.



Obr. 1. K odvození tvaru hladiny v rotující nádobě

Z obrázku a z velikostí sil vidíme, že $\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_o}{F_g} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g}x$. Zároveň $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ $= \frac{a x_2^2 - a x_1^2}{x_2 - x_1} = a\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = a\left(x_2 + x_1\right) \doteq 2a\,x$, kde při konečné úpravě bereme

$x_2 \doteq x_1 = x$. (Na tomto místě přeskočíme diskusi o tom, že Δx musí být malé, aby křivka prakticky splývala s tečnou a další detaily, na něž by samozřejmě bylo užitečné upozornit středoškolské studenty.) Z porovnání obou výsledných výrazů pro tg α plyne $2a = \omega^2/g$, takže výška hladiny nad nejnižším bodem je

$$y = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \ . \qquad (1)$$

Zde již opět pro vzdálenost od osy píšeme r, proměnnou x jsme v předchozích výpočtech používali proto, že u funkcí jsou na ni studenti zvyklí jako na běžně užívanou nezávisle proměnnou.

Vysokoškolské odvození využívající potenciál odstředivé síly zde reprodukovat nebudeme. Právě tak pomineme otázku, co by se stalo, kdyby nádoba s vodou stála a kolem ní se otáčel celý vesmír. Ne že by tzv. Machův princip, který s tím souvisí (viz např. [3], s. 34) byl nezajímavý, ale pokus roztočit celý vesmír jen těžko zrealizujeme – a ve škole při hodině fyziky tím spíše ne. :-) A my chceme od teorie přikročit k experimentu. S teoretickým odvozením tvaru hladiny se totiž každý z nás setkal možná už víckrát – ale kdo jsme si zkusili tvar hladiny opravdu *proměřit*?

Vodní paraboloid prakticky

Hladina vody se prohne i ve vědru, které zavěsíme na zkroucený provaz, který se postupně roztáčí. Takové vědro se však točí jen chvíli, rotace není rovnoměrná a točící se závěs vědra účinně brání jakémukoli přesnějšímu měření výšky hladiny. Pro pokus tedy potřebujeme poněkud méně improvizované experimentální uspořádání.

Pro náš experiment jsme chtěli zvolit co největší a přitom ekonomicky dostupnou nádobu, proto jsme sáhli po obyčejném plastovém umyvadle, které má doma každá hospodyňka. K roztáčení jsme použili nevyužitý motor z inventáře KDF MFF UK. Na ten jsme sestrojili rotující talíř s úchyty pro upevnění nádob s různým průměrem.

Jak měřit výšku hladiny a rychlost rotace

Otázkou zůstávalo, jak rozumně a co nejpřesněji naměřit tvar hladiny. Nechali jsme se inspirovat článkem [4] a pro první experimenty sestrojili „speciální měřidlo“. Do laťky o dostatečné délce jsme vyvrtali 31 otvorů (s roztečí 10 mm), do nichž byly zasunuty špejle, k odměření výšky (resp. hloubky) hladiny. Aby se špejle samovolně neposouvaly, přidali jsme ke každé jeden aretovací šroubek. Celé toto „měřidlo“ jsme umístili nad rotující umyvadlo, jak ukazuje obr. 2. Při rotaci nádoby jsme špejle posouvali, až se jejich konce dotkly hladiny (viz obr. 3).

Obr. 2. Rotující nádoba s měřidlem výšky hladiny

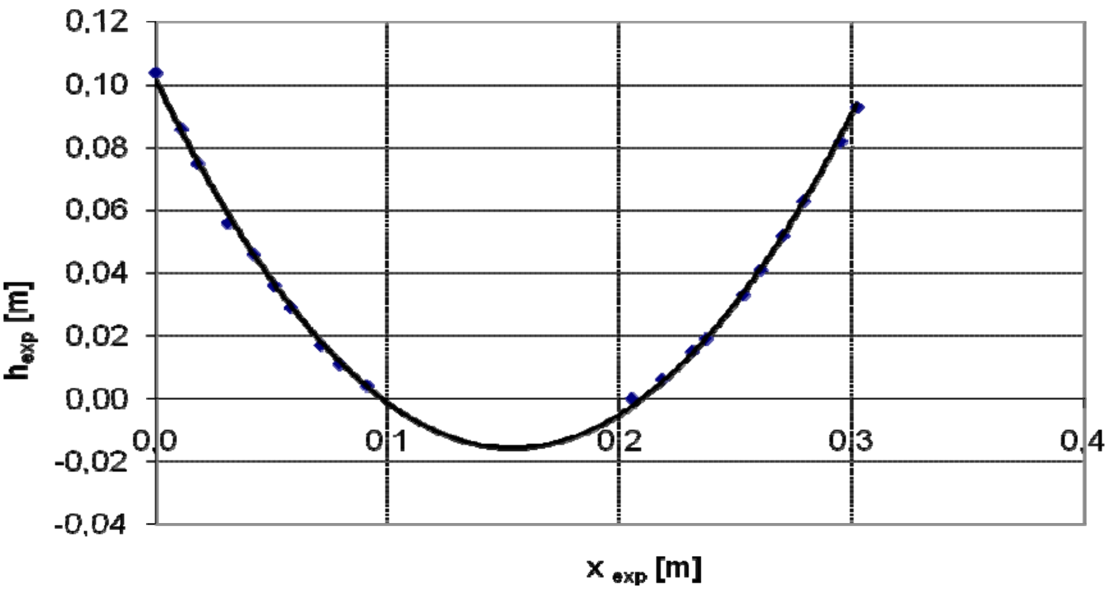
Nevýhodou špejlí je skutečnost, že se snadno prohnou. Proto jsme proměřili jak svislou, tak i vodorovnou souřadnici jejich konců. (Tedy jejich souřadnice x i y.) Zpracování naměřených dat ukázala, že i takto jednoduchým přístrojem získáme poměrně přesné a s teorií souhlasící výsledky. Pro další měření však již budeme užívat nové měřidlo, v němž místo špejlí jsou kovové tyčinky přesněji vedené otvory ve dvou kovových hranolcích.

Obr. 3. Měření výšky hladiny

Starší motorek, který roztáčí naši nádobu, nemá žádné měřidlo otáček. Úhlovou rychlost rotace jsme proto určili pomocí počítače. Použili jsme fototranzistor, připojený k mikrofonnímu vstupu zvukové karty notebooku. Fototranzistor snímal světlo odrážející se od boku nádoby, na níž jsme předem nakreslili tmavou značku. V signálu, nahraném programem Audacity, šlo lehce rozlišit „píky" odpovídající průchodu značky před čidlem a změřit periodu rotace. Jelikož otáčky motorku nezůstávaly přesně konstantní, vzali jsme průměr z hodnot změřených na začátku a na konci experimentu.

Zpracování výsledků: prokládání paraboly v Excelu

Naměřené hodnoty vodorovných a svislých souřadnic konců špejlí jsme zadali do tabulky v Excelu, vynesli je do grafu a nechali Excel proložit experimentálními body parabolu. Jak ukazuje obr. 4, parabola velmi dobře vystihuje naměřená data.



Obr. 4. Naměřené hodnoty jdou velmi dobře proložit parabolou

Porovnání experimentu a teorie

Excel dokáže najít i rovnici vykreslené paraboly. Z našich hodnot vyšlo $h = 4{,}94\,x^2$ – – $1{,}52\,x + 0{,}10$. (x a h přitom dosazujeme v metrech. Poznamenejme, že vodorovná souřadnice x a vzdálenost r od osy se liší o konstantu.) Chceme-li porovnat experiment s teoretickým vztahem (1), zajímá nás vlastně jen kvadratický člen. (Lineární a absolutní člen určují jen posun paraboly podél vodorovné a svislé osy.) Koeficient 4,94 u kvadratického členu by měl odpovídat koeficientu $\omega^2/(2g)$ ze vztahu (1).

Úhlová rychlost rotace nádoby určená ze změřené periody otáček byla $\omega = 9{,}89\ \mathrm{s}^{-1}$. Koeficient $\omega^2/(2g)$ odtud vychází 4,99 m^{-1}. Výše uvedená hodnota 4,94 m^{-1} získaná proložením paraboly se od něj liší o pouhých 0,9 %. Tak velkou přesnost jsme ani nečekali. I naším jednoduchým pokusem jsme tedy ověřili, že hladina v rotující nádobě má tvar paraboloidu a je ve shodě s teoretickým vztahem (1).

Vodní paraboloid s lodičkou

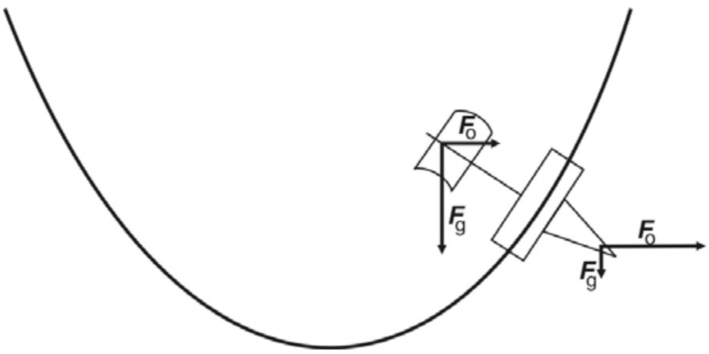
Zajímavou otázkou je, co se stane, jestliže na hladinu vody v rotující nádobě položíme malou lodičku (například z kousku polystyrénu). Kam by ukazoval „stěžeň“ lodičky a kam její kýl? A zůstávala by lodička „na stejné vrstevnici“, tedy ve stejné vzdálenosti od osy, nebo by ji „něco“ táhlo k ose či naopak od osy?

V naší rotující nádobě by tyto problémy mohl řešit třeba maličký námořník v krabičce od mýdla [5]. Ve velkém bychom se s těmito otázkami potýkali, pokud bychom spadli do víru Maelström, jako hrdina Poeovy povídky [6]. Pak by byla praktická aplikace příslušné fyziky opravdu otázkou života a smrti.

Experimenty v Maelströmu zatím neplánujeme – ostatně v točícím se reálném víru bude situace zřejmě složitější než na uklidněné hladině v rotujícím umyvadle. A protože i pro školní pokus se lépe hodí umyvadlo než mořský vír, je přirozené začít touto jednodušší situací. Kupodivu i zde narazíme na věci, které bychom možná na první pohled nečekali.

Kam míří stěžeň lodičky?

Začněme třeba směrem, jímž míří stěžeň lodičky (která je v klidu vůči rotující nádobě). Zdá se to být jednoduché – kam by měl mířit jinam, než kolmo na hladinu? U velmi malé lodičky tomu tak s dobrou přesností bude. Pro větší lodičku se však projeví, že stěžeň je blíž ose a kýl naopak dál – viz obr. 5. Na kýl tak výrazněji působí odstředivá síla; na stěžeň naopak méně. Výsledkem je, že stěžeň není kolmo na hladinu v místě lodičky, ale naklání se směrem dolů (k ose rotace).



Obr. 5. Síly působící na stěžeň a kýl lodičky

Zůstane lodička na hladině tam, kde ji položíme?

Podobně lze kvalitativními úvahami zdůvodnit, že lodička obecně *nezůstane* ve stejné vzdálenosti od osy, kam ji umístíme. Vztlaková síla, jíž na loďku tlačí voda, je rovna výslednici gravitační a odstředivé síly působící na vodu, kterou loďka „vytlačuje". (Tomuto konstatování bychom snad mohli říkat „zobecněný Archimédův zákon".) Části loďky vyčnívající na hladinu jsou blíž k ose než „vytlačená voda", a proto na ně působí menší odstředivá síla. Výsledná síla tedy bude loďku tlačit směrem k ose. V případě Maelströmu pak do středu víru, jak je to sugestivně popsáno v [6]. Tuto úvahu jsme potvrdili i pokusem: malé kousky polystyrénu se skutečně na hladině posouvaly směrem k ose rotující nádoby.

Samozřejmě, těžký kýl je naopak dál od osy a odstředivá síla na něj působící je větší. Může tedy působit proti výše uvedenému efektu. Skutečně, kousky polystyrénu se zapíchnutým hřebíkem se od osy postupně vzdalovaly směrem ke stěně nádoby.

Spočítat uvedený efekt kvantitativně se ukázalo zajímavým a ne zcela jednoduchým problémem. Jeho řešení, byť i jen pro přibližný výpočet, proto necháme již do jiného článku.

Závěr

Zdánlivě jednoduchá školská úloha na pomezí Fyzikální olympiády a úvodního vysokoškolského kurzu fyziky tedy v sobě skrývá nečekaná překvapení. Na jedné straně jsme viděli, že tvar hladiny lze pochopit (a příslušný vzorec „dokázat") vlastně jednoduše, bez vysokoškolské fyziky. A i detaily týkající se lodičky na hladině můžeme diskutovat pomocí kvalitativních úvah. Na druhé straně je hezké nezůstat jen u teorie, ale provést i reálný experiment. Třeba bude pro někoho naše práce inspirací na nějaký žákovský projekt. V něm by bylo zajímavé zkoumat i další věci, třeba jak hladina vody odráží světlo, jak se jeví dno nádoby při pohledu shora přes zakřivenou hladinu, atd. A naopak, kdyby byl někdo přece jen „zarytým teoretikem", najde v problému lodičky na vodním paraboloidu dost a dost námětů i na složitější výpočty. O hlubinách a zajímavostech dané úlohy určitě vše netušil ani mistr Edgar Alan Poe…

Literatura

[1] Kvasnica J. a kol.: *Mechanika*. 2. vydání, Academia, Praha 2004.
[2] Perelman J. I.: *Zajímavá fyzika*. Mladá fronta, Praha 1962.
[3] Votruba V.: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha, 1969.
[4] Basta M., Picciarelli V., Stella R.: *A simple experiment to study parabolic surfaces*. Teaching Physics, March 2000, p. 120-123.
[5] Plíhal K.: *Námořnická*. Text písně dostupný online na adrese http://www.karelplihal.cz/slova/31.php [cit. 22. 8. 2007]
[6] Poe E.A.: *Pád do Maelströmu*. In: Poe E. A.: Jáma a kyvadlo. Český překlad J. Schwarz. Odeon, Praha, 1978.